Notas del Curso de Pensamiento Matemático

Por **Gregorio Soberanes Cerino**

División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Versión 1.1. 20 de agosto de 2010

Prólogo

Estas notas se han realizado considerando como un axioma el hecho de que *todos tenemos la necesidad de aprender*. Por lo tanto de hacernos responsables de usar continuamente distintas estrategias y al mismo tiempo desarrollar diversas habilidades en nuestro aprendizaje cotidiano. Es claro que para esto, no debemos perder de vista nuestra curiosidad y nuestro deseo de aprender. ¡Que mejor motivación que el deseo de conseguir algo!

La idea fundamental en donde se desarrolla esta asignatura es la reflexión abierta de los conceptos, los resultados, los problemas, las estrategias, etc., que se presentan en el proceso del aprendizaje de la matemática. Lo cual implica tener todas las facilidades para que se desarrollen, se discutan, se manipulen o se descubran las ideas matemáticas en el salón de clases.

Problematizar, cuestionar, discutir son acciones muy comunes en este trabajo. Aunque también estamos conscientes de que lo que es un *problema* para uno puede no serlo para otro. Y he aquí la primera pregunta, ¿qué es un problema?

En estas notas damos a conocer nuestra experiencia del trabajo realizado en esta asignatura con nuestros alumnos, no es nuestra intención discutir los fundamentos teóricos; que los hay. Aunque si creemos importante discutir cuando menos los términos y/o conceptos que intervienen en nuestra práctica cotidiana, uno de ellos el concepto mismo de *problema*.

Aunque esta asignatura es parte de la currícula de todas las carreras que se ofrecen en la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, se pueden manejar muy bien estas ideas a nivel medio y medio superior, quizá con las adecuaciones correspondientes, pero sin perder la idea central de la propuesta; propiciar las condiciones para que los involucrados se sumerjan en un ambiente adecuado en donde ellos puedan descubrir, manipular y apropiarse del conocimiento matemático.

Ponemos pues a consideración este trabajo que con mucho esmero hemos realizado. Y en el cual se pueden encontrar:

1. El camino que hemos seguido en este curso.
2. Varias de las actividades que hemos llevado a cabo con nuestros grupos.
3. Muchas de las situaciones problemáticas que hemos trabajado con nuestros alumnos y
4. Una lista de problemas que se podrían plantear dentro de esta temática.

Aunque hay una cosa más que no hemos podido compartir con plenitud en estas notas, la cual espero cada quien pueda ir resolviendo de acuerdo a las circunstancias: el cómo hacerlo en el salón de clases. Esto es difícil de platicar, lo mejor es hacerlo.

A pesar de que a la fecha muchos de los planes de estudio ya se han reestructurado, y dado que la actualización del programa de estudio de la asignatura de Pensamiento Matemático no ha sufrido cambio sustancial de fondo, esperamos que estas notas que se han elaborado desde el 2006, puedan servir de ayuda en este nuevo enfoque de nuestro trabajo escolar. Tanto a los profesores, con miras de lograr que nuestros egresados actúen con responsabilidad en lo que les toque, que caminen siempre tomando decisiones adecuadas manejando la información que este a su alcance con sensatez y de manera crítica, como a los alumnos, con el afán de que logren lo anterior.

Hacemos la invitación a que sumemos esfuerzos para que la educación en Tabasco y en México mejore. En este sentido pedimos su colaboración para mejorar este trabajo, haciéndonos llegar sus comentarios, sugerencias, recomendaciones, etcétera.

Las siguientes lineas reflejan nuestra preocupación y justifican de alguna manera la existencia del este curso:

> Si exigimos desde el principio que se apliquen determinados formulismos y desaprobamos los procedimientos no usuales que los alumnos utilizan para enfrentar una situación, se inhibe su creatividad y se les resta confianza en sus propios recursos.

Y ha sido nuestro interés poner un granito de arena en este sentido. Ojalá estas notas nos puedan permitir coolaborar en esta noble causa.

Sólo el trabajo arduo y responsable nos podrá salvar.

Agradezco profundamente al Dr. Francisco Cordero, al Dr. Santos Trigo, y al Dr. Gonzalo Zubieta, del Departamanto de Matemática Educativa del CINVESTAV. A los colegas M.C. Candelario Angulo, M.C. Adrian Saldivar, M.C. Ezequiel Rojas, de distintas escuelas del IPN. A la M. C. Cristina Campos, de la DACB de la UJAT. Y por supuesto a mi amigo el maestro Rodolfo Conde, de la DACB de la UJAT. A todos ellos, por sus atenciones, observaciones, comentarios, cuestionamientos y sugerencias, todas de incalculable valor para la elaboración de estas notas.

A la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), en especial al Ing. Fernando García, director de la DACB de la UJAT,

a los alumnos de la UJAT, y a todas aquellas personas que de una u otra manera me han brindado su apoyo en la elaboración de este trabajo, mi gratitud.

Aprovecho la oportunidad para plantear algunas de las interrogantes que el Dr. Trigo considera son la base de una asignatura como esta. Ojalá puedan servir de reflexión para próximas revisiones al programa de estudios: ¿ qué significa plantear o formular un problema matemático? ¿qué significa resolver un problema? ¿qué es una conjetura, cómo se formula? ¿qué es una relación matemática? ¿qué significa demostrar un teorema? ¿qué significa argumentar en matemáticas? ¿cuál es el papel del lenguaje matemático en la comunicación de resultados? ¿cuál es el papel de las herramientas computacionales en la resolución de problemas? ¿qué formas de razonamiento se desarrollan con el uso de la tecnología en la resolución de problemas?, etcétera.

Finalmente quisiera despedirme diciendo que:

“Desarrollar el *pensamiento*, nos permite fortalecer nuestro músculo vital; *el cerebro*”.

Gregorio Soberanes Cerino

Índice general

Capítulo 1

Consideraciones Generales

En este capítulo planteamos algunos comentarios y unas que otras reflexiones que se han ido construyendo, algunos de forma empírica y otros de manera directa con los alumnos quienes nos han dejado compartir la experiencia de trabajar este curso durante varios semestres, tanto en la División Académica de Ciencias Básicas, como en la División Académica de Educación y Artes de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Básicamente hacemos referencia a tres aspectos fundamentales:

▷ Al programa de estudio de esta asignatura.

▷ A la evaluación que aquí hemos puesto en marcha; dentro de lo controvertido que esta pudiera ser.

▷ Y a la propuesta de trabajo que se plantea dentro del programa de estudios, misma que consideramos un tanto diferente a la forma tradicional de dar clases, pues gira alrededor del hecho de propiciar el ambiente y dirigir el trabajo del grupo para que se *construya el conocimiento* y no simplemente resumir nuestro trabajo en intentar *transmitirlo*.

Compartimos nuestros puntos de vista muy particulares de algunos hechos que hemos considerado importantes en este caminar, con el propósito de colaborar en la búsqueda de los puntos de convergencia en relación a los aspectos antes mencionados, y poder ayudar a divisar la intención original de esta asignatura.

Además, consideramos importante el hecho de alentar la comunicación entre la comunidad interesada en estos asuntos, pues creemos que a partir de ello posiblemente se puedan entretejer otras experiencias para poder abrir la discusión en relación a la enseñanza de la matemática en el nivel superior y/o posiblemente en el nivel medio superior, y en consecuencia, tener la oportunidad de elaborar material específico, que pueda servir de apoyo para aquellos que lo necesitan.

1.1. Sobre el Programa

La primera versión oficial del programa de estudio de esta asignatura, es el resultado del trabajo de la comisión integrada por la M. en C. Cristina Campos Jiménez y un servidor, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco (UJAT), y las personas especializadas en estos asuntos que fueron invitados por la UJAT y fungieron como asesores para tal efecto, en un intento por acercarnos a lo que se llama Programa de Estudio. El Programa está sellado con el conocimiento y la experiencia en Matemática Educativa de la Mtra. Cristina. Y por supuesto que contiene mi modesta contribución de acuerdo con mis conocimientos como matemático y mi experiencia como aficionado en la enseñanza de esta disciplina.

Actualmente ya se ha realizado la primera revisión del programa de estudio de esta asignatura, y el resultado de esta da lugar a la versión vigente que se puede consultar en la página de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, www.ujat.mx. Cabe mencionar que en el programa de estudios actual no se hacen cambios sustanciales de fondo.

Es muy probable que como profesor, cuando se nos asigna impartir una asignatura y tenemos la oportunidad de conseguir el programa, con suerte leemos todo el programa. Si no, cuando menos nos interesamos por el contenido del curso para ver los temas que se tienen que disertar en el salón de clases ante los alumnos. Bajo estas condiciones, este curso se convierte, a dicho de algunos compañeros, en un mini-curso de matemáticas básicas de secundaria.

En efecto, si sólo nos fijamos en el contenido, podemos quedar con esa desafortunada impresión, perdiendo totalmente el objetivo del curso. Lo más delicado es que se vea en esta asignatura la posibilidad de convertirlo en un curso tradicional de matemáticas con el único propósito de reunir créditos. En este sentido, el definir una lista de temas, puede causar este tipo de situaciones que consideramos grave de acuerdo con la tendencia de la nueva currícula flexible que busca, entre otros aspectos, que nuestros egresados sean profesionales críticos.

Por lo antes dicho, sugerimos se lea y se discuta el programa de estudios completo con los alumnos, sin perder de vista la presentación, que intenta acercarnos a la idea de cómo se quiere trabajar el curso para lograr el objetivo. Si es posible, consideramos saludable se haga una reflexión del programa con los compañeros maestros a quienes se les asigna este curso.

Compartimos la opinión de que los alumnos tienen en esta asignatura la oportunidad de recordar o resignificar algunos de sus conocimientos previos, como los que se marcan en la lista del contenido, pero eso depende mucho del perfil del alumno, del profesor y de la estrategia de trabajo que se implemente en cada grupo, lo importante en esta asignatura es que el alumno tenga la *oportunidad de aflorar su inteligencia* para resolver los problemas que se le presenten.

Estamos convencidos de que el hecho de incursionar en el lenguaje matemático lo ayudará en gran medida a descubrir y desarrollar tales inteligencias; sin menospreciar otras asignaturas que tambien lo pueden ayudar en este sentido, aunque posiblemente lo hagan en menor grado. De paso, esta asignatura puede ayudar a los que se involucren con ella, a que cambien la perspectiva que se tiene de la matemática: de dura, difícil o sólo para cerebros, dicho en palabras de los propios alumnos. Si tan sólo lograramos avanzar en esto último, ya hemos ganado, pues ellos se encargarán de persuadir a las próximas generaciones de que el hombre está diseñado para pensar y la matemática, entre otras, es una excelente opción para cultivar el intelecto.

Por otro lado, los alumnos, más bien nuestros alumnos, lo ven de buena manera e inclusive muchos opinan que se deben tener otras asignaturas para darle continuidad a estas ideas. En otro momento presentaremos tales opiniones que hemos recogido de nuestros alumnos. Por ahora únicamente nos permitimos presentar en el Apéndice 3.2 de la página 97, los instrumentos escritos que hemos usados para conseguir tal información. Independientemente de lo enrriquecedor de todos los comentarios "de pasillo" que nos han hecho llegar.

Los temas en el programa se marcaron, más bien, como una forma de delimitar la gama de situaciones problemáticas que se pueden tratar. Con el propósito de detener la intención de sumergir a los alumnos en situaciones desconocidas o ubicados fuera de su realidad, que seguramente le traerán otros conflictos que no permitirán abrir el espacio para que ellos puedan desarrollar las habilidades del pensamiento.

El orden de las unidades tambien obedece a una razón muy sencilla. Y es que al hablar de la matemática , tenemos que hacer referencia a dos cosas, entre otras:

1. que ésta por si misma es un *lenguaje*, al cual debemos tener un primer acercamiento si es que queremos entablar una buena comunicación dentro de este.

2. que el *orden* es uno de los pilares fundamentales en esta disciplina.

Se hace necesario entonces, entender su estructura y sus procedimientos como en todo lenguaje –primera unidad–, para luego practicar y obtener cierto grado de madurez y destreza en el manejo del lenguaje.

Creemos que la teoría de conjuntos es una excelente opción para ello. Sin embargo, se pueden encontrar otras alternativas para conseguir lo mismo. Hecho esto, consideramos que hay condiciones estandarizadas en el grupo, como para enfrentar con éxito muchas situaciones problemáticas sencillas que permitan, más que hacer las cuentas u operaciones –acotadas en el programa–, plantear una buena estrategia de solución, con la posibilidad de acompañarla con la solución.

La idea del programa es propiciar un buen inicio a la matemática básica, presentando a la vista de todos la utilidad que esta tiene en nuestra vida diaria, pero no en el discurso sino en el enfrentamiento a las situaciones que viven los alumnos y que le dan la razón de la existencia de la matemática.

Nótese que esto requiere entre otras cosas, de atención, dedicación y muchas ganas de poner a trabajar una buena cantidad de neuronas. Pero, ¿cómo lograrlo? La respuesta a esta interrogante es otra razón que nos mueve a escribir y compartir nuestra experiencia. Esperamos se puede ir diluyendo tal interrogante a medida que se revisan estas notas.

1.2. Sobre la Evaluación

Por lo complicado y delicado que puede llegar a ser la evaluación del alcance del objetivo por parte de los alumnos, es muy importante que desde el inicio, se defina en común acuerdo, una buena estrategia para que la nota final sea lo más cerca posible a la realidad de los alumnos, y en consecuencia todo llegue a feliz término.

Desafortunadamente en nuestro sistema, esta evaluación se reduce en algo tan frío como un *numerito*. Aunque el concepto de evaluación es muy amplio y complejo, sobre todo porque entra en juego la parte subjetiva del ser humano, esta puede y debe servir para tener elementos que puedan ser útiles para ir precisando el rumbo de la asignatura en todos los sentidos; de contenido, de estrategia de trabajo, de redefinición de actividades, etcétera.

Seguramente la estrategia que se defina dependerá en gran medida de la personalidad del profesor y de las condiciones del grupo en general, pero todos deben admitir que la estrategia predefinida es el camino acordado para obtener la nota final en el curso.

Si el mismo proceso de la evaluación, como lo hemos señalado antes, es muy complejo. Escribir la manera en que lo hemos hecho, lo es aún más. A pesar de ello, enumeramos a continuación algunos aspectos que hemos considerado para lograr definir de la mejor manera, el "numerito" que le corresponde a cada alumno:

⋆ El enfrentamiento a una serie de problemas que se van planteando y resolviendo en clases, desde luego con nuestro apoyo. Estos se han planteado en clases con un tiempo estimado para buscar, confrontar, comprobar y compartir ideas alrededor de la solución, en ocasiones se ha trabajado en parejas o en equipos de tres alumnos, pidiendo que entregen las estrategias de solución, o en su caso la solución, en forma escrita e individual, lo cual convierte momentáneamente nuestro trabajo en revisar lo que ellos escriben, y de ser necesario, en platicar con ellos en forma personal o por equipos, para aclarar los posibles detalles en el manejo de conceptos o procedimientos.

  Hemos tomado el registro del desarrollo de estos problemas en el salón de clases y en lo que reporta por escrito cada alumno.

⋆ La disposición y la forma de colaborar en las actividades que se plantean en las sesiones de clases durante el curso.

⋆ Se ha tomado en todos los casos (grupos), el acuerdo de la posibilidad de exentar el curso con una cantidad mínima de puntos –de ocho en algunos grupos– que logran reunir de acuerdo a los puntos anteriores.

⋆ En caso de no exentar, se ha practicado un examen final (ordinario) que ha consistido generalmente de una secuencia de actividades y problemas “adecuados” que permiten evidenciar la capacidad para enfrentar situaciones problemáticas y las habilidades para resolverlas. En nuestro caso, se ha tomado en cuenta el historial del alumno durante el curso para decidir la nota despues del ordinario.

⋆ En caso de no lograr la nota aprobatoria se ha procedido, según el reglamento, al examen extraordinario . En nuestro caso, siempre se ha tomado en cuenta el historial del alumno durante el curso y el resultado del ordinario para decidir la nota despues del extraordinario.

Ha resultado una grata experiencia, para todos, en varios casos en los que se ha practicado, el hecho de buscar momentos (dos) propicios en el desarrollo del curso, para hacer una especie de autoevaluación de los alumnos, la cual ha consistido en pedir a ellos por escrito e individual su nombre, nota que merece y el por qué la merece. Luego, dividimos el grupo en cuatro o cinco equipos y pedimos nuevamente se pongan de acuerdo en cada equipo en una estrategia para que tal equipo asigne una nueva nota a sus miembros. Esto ha resultado importante y de mucha ayuda, pues se tienen además de nuestros registros en el curso, dos buenas referencias por parte de los alumnos para la nota final.

Antes de pasar a otra cosa, es importante señalar que hay puntos necesarios que se deben considerar en relación a la evaluación, claro, esto como ya dijimos, depende de las condiciones y el ambiente que se dé dentro del salón de clases. De acuerdo a nuestra experiencia, podemos citar los siguientes:

1. La asistencia y puntualidad a las sesiones es indispensable para el buen desarrollo del curso, sin que ello amerite puntos extras para su calificación final.

2. Los trabajos extraclase , –tareas o problemas que se piden se resuelvan en casa– en general, no impactan directamente en la evaluación sino hasta que se logra evidenciar en clases (o fuera de clases) que se cumplió con tal encomienda. Por lo tanto, esto queda como mero entrenamiento para el buen

desempeño en la sesión de clases. Evidentemente tiene un impacto indirecto en la evaluación.

Por lo dicho antes, podemos señalar que entre los compromisos fundamentales que debemos hacer ambas partes (maestro y alumnos), para que el trabajo del curso se desarrolle adecuadamente, se encuentran: la asistencia, la puntualidad y la tarea en casa o fuera de clases.

Quisiéramos compartir el intento que hemos hecho por mejorar nuestro desempeño en relación a esta y a todas las asignaturas en la que nos ha tocado trabajar. En este caso, hicimos una especie de sondeo o evaluación, si se puede llamar así, del curso, del programa y del profesor (guía) por medio de una entrevista escrita[1] la cual nos ha dejado ver muchos aspectos interesantes que hemos tomado en cuenta personalmente para propiciar un mejor ambiente de trabajo en las sesiones de los cursos posteriores.

Es de esperarse que en esta nueva dinámica, la evaluación tiene que entrar en un rol significativamente distinto a lo marcado por la tradición, de tal forma que es natural, cierto grado de resistencia o indiferencia de nuestros compañeros maestros, pero no esperamos lo mismo de parte de los alumnos. Sin embargo, más de uno, han expresado su extrañeza a este nuevo proceso, situación que posiblemente es atribuíble a que ya estamos predispuestos para entrar en la acostumbrada dinámica tradicional. De aquí que, a manera de reflexión, queremos hacer notar lo siguiente:

si nos hemos dispuesto a cambiar la concepción que tenemos de nuestro quehacer docente con el deseo de mejorar el nivel educativo, evidentemente se hace necesario un cambio significativo en la forma

[1] Ver el Apéndice 3.2 de la página 97.

de interpretar la *evaluacion* y sobre todo en la forma de llevar a cabo este proceso.

1.3. Sobre el Trabajo que Implica

Aunque no es nuestra misión tratar de convencer completamente a todo el mundo, de una asignatura como esta, consideramos que es bueno reflexionar sobre lo que hacemos dentro del salón de clases y sobre todo de lo que ocurre en este sitio en relación al motor que lo mueve: *el conocimiento* . En general, hacer una reflexión de lo que hacemos o no hacemos dentro o fuera del ámbito escolar, no está demás, máxime si ponemos atención en *cómo* lo hacemos.

Es pues, de especial interés reflexionar, hasta donde su complejidad lo permita, sobre aquello que ocurre en el *pensamiento* de los alumnos cuando este logra, o no, apropiarse de tales o cuales conocimientos marcados en los programas de estudios, ya que aquí se llevan a cabo una gran cantidad de reacciones naturales del ser humano, dependiendo de las condiciones externas que lo estimulen.

En la generación de estas condiciones externas es donde nosotros como profesores desempeñamos un papel fundamental dentro del salón de clases, y en general en la conducción de los alumnos por lo que queremos que aprendan.

El primer paso que hemos dado en este sentido, considerando el riesgo que se corre de darle la vuelta al programa de esta asignatura, como hemos mencionado en la sección 1.1, es echar mano al documento del programa en donde se encuentra textualmente, la sugerencia de proporcionar una copia de este último a los alumnos para discutirlo juntos, profesor y alumnos, como una primera actividad en el salón de clases. Esto entre otras cosas, con el fin de tomar acuerdos sobre el rumbo que debe llevar el curso apegado a la intención que se marca, y poder definir el trabajo de cada parte, el de los alumnos y el del profesor, así como la forma general de llevarlo a cabo.

Es conveniente aprovechar el momento para dejar en claro, lo más posible, tanto el rol general que tendrá el profesor en todo el curso, como el papel que desempeñará el alumno. Así como las condiciones generales en que se desarrollará el *trabajo de esta asignatura*, incluyendo las obligaciones de ambas partes.

Es importante que todos asuman con responsabilidad el compromiso que se adquiere al participar del trabajo que implica el curso.

Si revisamos el programa de estudios oficial vigente, nos encontramos que sugiere que el profesor o guía, constantemente se encuentre diseñando e implementando actividades o situaciones problemáticas que puedan conducir a los alumnos al descubrimiento de los conocimientos, conceptos o procedimientos que se desean alcanzar según el planteamiento de los objetivos particulares por unidades.

En este trabajo, además de compartir algunos ideas y comentarios que puedan contribuir a aclarar la intención y la forma de trabajar este curso, también intentaremos presentar algunas de las actividades que hemos desarrollado con nuestros alumnos, y otras más que se podrían proponer con la misma finalidad; propiciar un buen ambiente de trabajo en el salón de clases para que se pueda construir el conocimiento. Algo de esto se puede leer en la presentacióndel programa, en donde se expresa que el trabajo del profesor o guía requiere de tiempo, para buscar o intentar diseñar algunas situaciones o problemas que puedan dar lugar posiblemente a una *secuencia didáctica*; de creatividad, para elaborar tales secuencias o situaciones didácticas; de paciencia, para desarrollar tales actividades con los alumnos; y de más tiempo, para revisar la caligrafía, la ortografía, la redacción y sobre todo los argumentos que se dan para obtener tal o cual resultado o conclusión, en lo que el alumno reporta.

Aunque el trabajo da señales de ser árduo y algo tedioso, puede ser gratificante de acuerdo con los resultados que se tengan, dado que

> si logramos que los alumnos cambien su opinión que tienen de la matemática, debemos sentirnos satisfechos, pues esto, desde nuestro punto de vista, será crucial para salir del "hoyo" en que se encuentra actualmente la educación matemática.

Recuérdese que todos nacemos, vivimos y morimos con un ingrediente muy importante para nuestras vidas: las matemáticas. Posiblemente es bueno reflexionar qué sería de nuestro mundo sin ella.

Pero, ¿cómo debemos trabajar en esta asignatura? En esta y otras preguntas quisieramos centrar nuestra atención en el transcurso de estas notas. Sin embargo, aceptamos que platicar el cómo se desea trabajar en este curso, es complicado. Las actitudes que se tomen para lograr el objetivo, depende en mucho de las habilidades del profesor para que los alumnos, construyan el conocimiento que se desea, o logren desarrollar las habilidades que se requieren.

Esperamos sinceramente que al final de este trabajo podamos transmitir lo que se quiere hacer con esta asignatura y la forma en que se quiere hacer. Al mismo tiempo sirva éste, para compartir experiencias y puntos de vista sobre nuestra labor docente.

No hablamos más del trabajo que implica esta asignatura pues ese es el punto primordial en estas notas, que esperamos se pueda dilucidar en los próximos capítulos.

Capítulo 2

El Lenguaje Matemático

Antes de cualquier intento de utilizar los conceptos, resultados y procedimientos propios de la Matemática, haremos una reflexión sobre ellos, aunque se tengan ya algunas ideas sobre los particulares.

Desde nuestro punto de vista, estas definiciones, ideas, o procedimientos intuitivos, muchas veces, de una manera u otra, nos han conducido a una serie de tropiezos que son los responsables de que asumamos cierta actitud ante las matemáticas, a grado tal que en múltiples ocasiones tenemos que luchar por la apatia o el desprecio que muchos de nuestros alumnos sienten por las matemáticas, cuando esta es una herramienta muy poderosa para la ciencia, la tecnología, y para el hombre en general.

Así pues, hacemos la invitación a echarle una miradita a la *matemática*. ¡Pero no se asuste! Nuestra idea es hacerlo no como herramienta, sino como objeto de estudio.

Dado que estamos tratando con un lenguaje, tenemos a la vista la razón por la cual, en la primera unidad del programa de este curso de Pensamiento Matemático, se propone que se abra un espacio para la discusión en relación al uso formal y adecuado del Lenguaje, y específicamente el comienzo del Lenguaje

Matemático.

Como hemos dicho antes, al igual que la lista de los temas, el título de la unidad 1 del programa de este curso que se llama *Elementos de Lógica*, posiblemente nos invite a confundir la intención original del curso, por la de un curso tradicional de lógica. Esperamos que esto no ocurra.

Una alternativa para no llegar a esta posible confusión, desde el momento mismo de leer el título de la unidad, es cambiarle de nombre; cuestión que se tendrá que dirimir en la próxima revisión que se haga del programa. Como propuesta, podríamos llamarla *Elementos del Lenguaje Metemático*, o bien, *Lenguaje y Semántica de los Conectivos Lógicos.*

Esta es una razón más para escribir estas notas, en las cuales intentaremos escribir las experiencias más importantes del desarrollo de este curso en los diversos grupos con los que hemos trabajado, tanto en la División Académica de Ciencias Básicas como en la División Académica de Educación y Artes de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

2.1. El Lenguaje

Quisiéramos mostrar con unos “ejemplitos”, la forma tan compleja en que se dan los procesos de nuestro razonamiento y la manera de comunicarnos con otras personas dentro de la convivencia humana, gracias al pensamiento.

Muchos animales tienen, por asi decirlo, una forma muy elemental de razonar y una manera sencilla de comunicar sus ideas. Pero, al fin de cuentas, no es más que un pequeñísimo destello del tipo de razonamiento mucho más complejo que usa el hombre en situaciones cotidianas.

Traslademonos a la esquina de una calle concurrida de la ciudad o al parque central para observar lo que hace la gente: hombres, mujeres y niños van y vienen; Un hombre va muy tranquilo a su trabajo, una señora apresura a su hijo que lleva su mochila llena de libros, porque ya casi es la hora de que cierren el portón en la escuela, un joven bolea los zapatos de un caballero bien vestido, mientras otro se fija en las personas que traen los zapatos sucios para ofrecerle sus servicios; el voceador ofrece los periodicos, mientras está vendiendo a otros, un muchacho pedalea su bicicleta, el ruido de los motores de los automóviles es constante, el dependiente del negocio de enfrente despacha con prontitud, etcétera.

Parece que cada persona tiene un imán en su cuerpo que los conduce, y algo raro que les permite encadenar sus múltiples relaciones sociales. Pero, ¿qué es esto que los mueve y que los hace accionar y reaccionar? y por otro lado, ¿qué es aquello que les permite entretejer sus múltiples relaciones con otras personas? Se queda de tarea.

Resulta claro pues, que el *pensamiento* es como la electricidad o el aire, no se ven pero se sienten sus efectos. Y seguramente es el responsable de lo complicado de la actividad humana.

Ahora veamos rápidamente una de tantas situaciones típicas en este hormiguero humano, que posiblemente, al estar tan acostumbrados a ellas, ni siquiera ponemos atención en cómo los actores entienden cada paso que se efectúa en este proceso.

Intentemos escenificar la siguiente situación.

Observamos a una persona que llega al banco y mientras está esperando turno, rellena los datos de una hoja de un talón (chequera), la desprende y espera. Le toca su turno y mete en la abertura de la ventanilla la hoja con los datos requeridos (cheque). La cajera pide una identificación, examina los datos y compara las firmas. Si los datos están correctos y las firmas coinciden, acepta el cheque. Si no está segura de la coincidencia de las firmas, es muy probable que tome otras decisiones, por ejemplo, pedirle a la persona de la ventanilla que firme delante de ella para efectuar otra comparación.

Una vez que está segura que todos los datos y la firma son correctos, abre un cajón, saca de él cierto número de papeles de color café con la foto de Ignacio Zaragoza, otros verdes pero con la foto de Juana de Asbaje, y otros de color rojo con una imagen del rostro de Nezahualcoyolt; además de un montón de distintas piezas de metal, muy curiosas. Tras contarlos varias veces, los entrega al señor de la ventanilla, quien nuevamente las cuenta y se marcha.

Siguiendo con la historia, el señor, poco tiempo despues, entrega algunos de estos peculiares papeles de colores y algunas otras piezas de metal a otras personas, y a cambio le dan alimentos, transporte, zapatos, ropa, y otras necesidades y servicios útiles para su viva. Observamos además que en algunas de estas transacciones recibe otros de estos papeles o monedas a cambio.

En esta serie de actos que hemos descrito muy a la ligera, se encuentran muchos procesos de razonamiento complicados, que no lo vemos en otros animales, que por lo mismo, cubren sus necesidades de sobrevivencia de una manera más sencilla que el hombre.

¿Qué puede significar esto que hemos platicado para un perro, un gato o cualquier otro animal? Inclusive esto puede no tener significado para otra persona. Pero, ¿por qué no tiene significado para ellos? Dejamos de tarea la reflexión sobre esta pregunta.

Subrayamos que aquí está presente el pensamiento, o más bien, la elaboración de pensamiento del hombre, es decir, la habilidad del hombre para formular ideas y comunicarlas a otras personas por medio de lo que conocemos como *lenguaje* escrito o hablado.

Sin duda que como en toda convivencia humana, el ambiente escolar está inmerso en esta elaboración contínua de pensamientos, en los que creemos tenemos la tarea de considerarlos con mucha atención, sobre todo aquellos procesos que se llevan a cabo en el *pensamiento* de los alumnos sobre el puente de lo que se enseña y lo que realmente aprenden en forma efectiva.

La literatura sobre Matemática Educativa, hace referencia insistentemante a la atención que debemos prestar a estos procesos.

Aunque este asunto es muy complicado y tiene muchos matices, pues implica adentrarse tal vez en la actividad subconsciente e inconsciente de los alumnos, y posiblemente sea una de las partes más misteriosas del ser humano, debemos tratarlo con el debido cuidado.

Sin pretender siquiera ser un estudio introductorio en este tema, en esta asignatura se intentan abrir los espacios necesarios para la reflexión y/o discusión entre los profesores y alumnos, sobre asuntos de esta naturaleza que sin duda será un detonador importante para motivarnos a investigar más sobre el particular.

Antes de seguir adelante en materia –que no es la idea central en este trabajo– concentrémonos en lo que hemos hecho en nuestro curso.

Aunque puede o no discutirse el nombre del curso, *Pensamiento Matemático*, nosotros lo hemos hecho en cada ocasión, con el ánimo de hacer algunas reflexiones al respecto y lograr tener las premisas que nos puedan llevar a la convergencia de las ideas que se manejarán en el curso.

Después de conocer, discutir y tomar los acuerdos para el desarrollo del curso, hemos iniciado la discusión sobre El Pensamiento Matemático, de varias formas. En algunas ocasiones se ha planteado al grupo[1] que escriban en su cuaderno, la respuesta que consideran a la pregunta:

¿Qué idea le asocias a la expresión: Pensamiento Matemático?

Antes de cualquier comentario al respecto, es decir que la respondan de acuerdo a su intuición, se invita a que se documenten, dejando un tiempo razonable para ello. En su momento, se hace la discusión en el grupo y se vuelve a plantear la misma pregunta. Después de la discusión, es importante se haga la conclusión y que cada alumno escriba su propia idea aproximada de lo que se entenderá por Pensamiento Matemático. Al menos en el curso. Es interesante que tengan registro de las dos versiones; antes y después de la discusión. Y se ponga atención en la diferencia de una y otra.

Como resultado, hemos obtenido buenas aproximaciones del nombre de la asignatura, mismas que empiezan a definir el rumbo del curso.

Hemos recomendado para ello, leer el libro del Dr Ricardo Cantoral, *Desarrollo del Pensamiento Matemático* [11]. Aunque pueden hacerlo en lo que tengan a su alcance. De hecho consideramos que la diversidad de las fuentes de investigación hace nutrida la discusión.

En esta y en todas las discusiones, el profesor o guía debe moderarla, pues en ocasiones, dependiendo del grupo y la información que se haya conseguido, los temas dan para mucho y no es la intención del curso meterse a fondo en estos temas, a menos que el

[1] Idea tomada de [11].

profesor lo considere así; sólo sugerimos no pasar por alto estos puntos pues se hacen necesarios para entender de lo que trata el trabajo del curso.

Ha dado buen resultado, al menos les ha gustado a muchos alumnos,

reflexionar el cómo su pensamiento ha actuado para apropiarse de algún conocimiento matemático que ellos ya tienen,

aunque sea un conocimiento básico pero que ya lo hayan aprendido.

Por otro lado, tambien es muy interesante reflexionar el cómo logramos compartir este conocimiento adquirido con nuestros semejantes. Pero bueno, es cuestión de los involucrados, dejar o no, espacios para tomar acción al respecto.

A partir de lo que hemos planteado hasta ahora, ya podemos darnos cuenta del transcendental papel que juega el *lenguaje* en todo este proceso de adquirir y compartir el conocimiento. Así que manos a la obra.

En repetidas ocasiones hemos dejado que los alumnos se documenten sobre el lenguaje. Si se comparte esta idea, sugerimos lo hagan en varias fuentes, al menos en dos, con el ánimo de enriquecer la discusión en el salón.

Se recomienda echarle un vistazo en el libro del Dr. Arturo Fregoso, *Los Elementos del Lenguaje de la Matemáticas I* [2].

Como resultado de esta discusión salen, seguramente, otros conceptos dignos de aprender, pero sobre todo nos podemos dar cuenta de que algo tiene que ver la matemática con el lenguaje, y más precisamente con el llamado *lenguaje formal*, que tiene sus diferencias con lo que podriamos llamar *lenguaje natural*.

Si esto ocurre, estamos obligados a tener las mejores aproximaciones a los conceptos que aparecen en el siguiente diagrama, entre otros que pueden salir, dependiendo del desarrollo y alcance de la discusión:

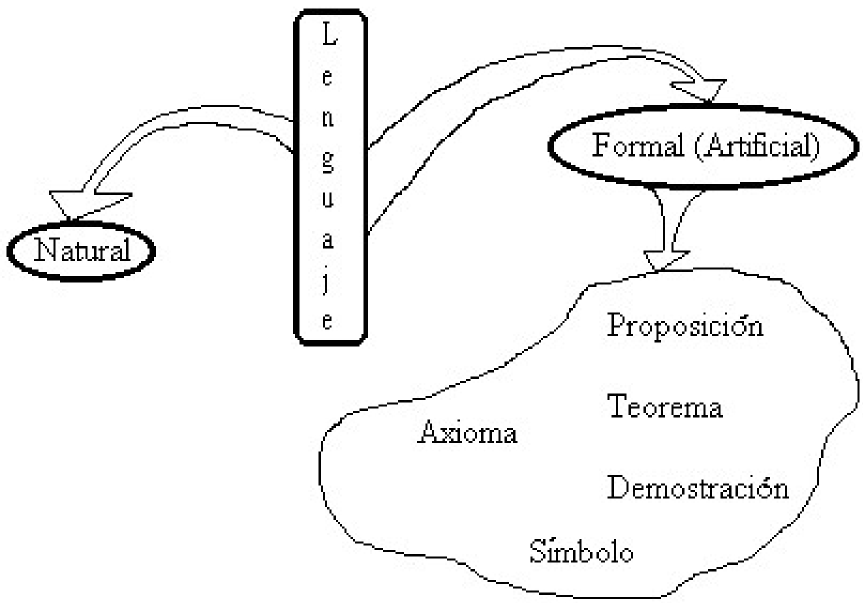

Figura 2.1: El Lenguaje.

Sobre todo, si hacemos caso a la premisa de atender todo aquello desconocido a nuestro paso por la vida.

Aunque el guía (profesor) puede recurrir a diversas formas para llevar a cabo la discusión con tal de que todos los involucrados puedan llegar a una buena idea sobre estos conceptos para estar en condiciones de darle un manejo adecuado, en caso de que se requiera. Platicamos aquí que, dependiendo de las condiciones del grupo, se han empleado distintas estrategias para tratar estos temas. Una de ellas es dejar que todo mundo, incluyendo el guía, se documente en diversas fuentes sobre el tema, y que este diseñe e instrumente una actividad para que se logre la apropiación de cada uno de estos conceptos.

En algunos casos hemos planteado por ejemplo, la siguiente actividad para reforzar algunos conceptos relacionados con este tema, axioma, teorema, demostración.

Actividad 1

LA CARTA MÁGICA
Pensamiento Matemático
Fecha...

INSTRUCCIONES: Considera el siguiente juego. Practícalo con tus compañeros para entenderlo bien y finalmente contesta a las preguntas planteadas.

Este juego se realiza entre dos personas, que llamaremos Juan y Pedro, y 21 cartas distintas, sin importar de que tipo sean sólo que se puedan distinguir unas de otras.

Juan toma las cartas y le pide a Pedro que escoja una carta al azar para que la observe por un instante y se la regrese sin que éste la vea.

El objetivo del juego es que Juan adivine la carta que escogió Pedro. Para ello Juan procede como sigue:
Revuelve las cartas tanto como quiera. Las reparte boca arriba y una por una en tres grupos de siete para luego preguntar a Pedro en qué grupo quedó la carta que escogió. Las junta de nuevo de tal forma que el grupo señalado por Pedro quede enmedio. Ahora repite tal repartición, hace la misma pregunta y vuelve a juntar

como antes. Hace esto una vez más.

Juan muestra a Pedro la carta que quedó en el lugar undécimo, y afirma: esta es tu carta.

Y efectivamente, esa era la carta.

Ahora conteste la serie de preguntas y haga lo que se pide:

1. ¿Juan utilizó elementos primitivos? ¿Cuáles?
2. ¿Juan siguió algunos axiomas? ¿Cuáles?
3. ¿Por qué Juan pudo adivinar la carta que escogió Pedro?
4. ¿Conocía algún teorema? ¿Cuál? Enúncialo.

En esta y en muchas otras actividades propuestas, se discute en equipos, se plantea la plenaria y se pide, generalmente, por escrito y en forma individual (a veces por equipos –cuando no hay plenaria–) las respuestas a las preguntas.

Se puede pedir la demostración del teorema, si lo hay, en la misma actividad o dejarla para otra actividad:

Actividad 2

LA CARTA MÁGICA (Cont.)
Pensamiento Matemático
Fecha...

INSTRUCCIONES: Considera el juego de la actividad uno y demuestra el teorema de la pregunta 4, si lo hay.

1. ¿Por qué presentas la demostración en ese orden?
2. ¿Hay alguna regla para hacerla así?

Cuando se procede de esta manera, es decir, que los alumnos se documentan para hacer en el salón de clases la actividad correspondiente, se debe tener el cuidado de que todos tengan conocimiento del tema pues la actividad sirve para someterlos a un estado de desequilibrio en relación a lo que ya saben, para que finalmente, después de hacer las conclusiones de la actividad, lleguen a un estado de equilibrio que les permita reafirmar y/o modificar lo estudiado previamente.

Resulta muy importante aprovechar la oportunidad de cuidar los argumentos y la redacción cuando se pidan las respuestas por escrito.

Obsérvese también que es necesario la asistencia y la puntualidad de todos los involucrados para el buen desarrolllo de nuestras actividades.

En muchas ocasiones hemos preferido, aunque parezca estricto, tolerar unos 10 mimutos antes de la sesión y no permitir el acceso, transcurrido este tiempo, que interumpir la actividad en pleno desarrollo. Claro, todo en común acuerdo.

2.2. Los Símbolos

La necesidad del hombre de comunicarse con otras personas, función primordial de los lenguajes, lo ha llevado a inventar procedimientos para poder transmitir a sus semejantes, las ideas y sentimientos generados por sus experiencias vividas. Esto lo ha conducido a construir “representaciones” que son fácilmente manejables, a diferencia de las ideas, muchas de las cuales resultan difíciles de manipular.

Cuando logra dar orden, bajo ciertos acuerdos, a estas primeras representaciones, construye los primeros cimientos de lo que hoy en día llamamos *lenguaje*.

Se han ido construyendo representaciones cada vez más complejas y especializadas a medida que el hombre va generando tales necesidades. Si ponemos atención, podemos observar que en todos lados donde se den las relaciones humanas, encontramos indicios de tales representaciones. En particular, en cualquier área científica o tecnológica, hay evidencias de esto. Sobre todo cuando nos enfrentamos con situaciones donde tenemos que transmitir algunas ideas difíciles de explicar a los demás, cuestión muy común por ejemplo en matemáticas.

Es bueno reflexionar o cuando menos imaginar cómo se daría la comunicación sin el uso de las mencionadas representaciones. Lo que si es evidente, para casi todos, al menos eso es lo primero que se dice y se aprende –la matemática es una maraña de bichos raros– , es que la matemática no podría existir, sin ellas. En esta disciplina, es imprescindible el uso de tales representaciones, que en lo sucesivo vamos a llamar, *símbolos*.

Tan es así, como hemos mencionado antes, que es común escuchar decir que la matemática es una maraña de símbolos, y de paso, difíciles de entender. Creemos que en efecto, se presenta este detalle, como en cualquier otro lenguaje, cuando se intenta entender algo cuya base aún no entendemos.

Sinceramente, esperamos que en esta asignatura se puedan rescatar los elementos necesarios para entender las bases, los procedimientos y/o procesos con los que funciona la matemática, y podamos infundir de alguna manera la formación de una opinión diferente sobre esta disciplina.

A pesar de que el concepto de *símbolo* apareció en la sección

2.1 de la página 16; los billetes, las monedas, el cheque, etc., son ejemplos de ello, posiblemente lo hemos considerado con cierta ligereza. Sin embargo, consideramos que es bueno poner atención especial en este tema, dada la importancia que alcanzan dentro de los lenguajes, y en particular, en el lenguaje que nos ocupa, el matemático.

Aunque hay diversas formas de tratar este tema, como en todos los demás, es cuestión de que se mida de cierta manera las condiciones del grupo, y se pueda generar una buena estrategia para atender este concepto.

Nosotros hemos puesto en marcha varias formas diferentes para trabajarlo. En ocasiones hemos trabajado siguiendo la misma metodología en grupos distintos, pero tenemos que decir que el comportamiento del grupo y del profesor, la hacen completamente diferente en cada caso.

Se pueden consultar varias fuentes para documentarse en el tema, pero como sugerencia recomendamos leer las ideas presentadas por el Dr. Arturo Fregoso en su libro *Los Elementos del Lenguaje de la Matemática 1. Lógica y Teoría de Conjuntos* [2].

Hemos de advertir que en ocasiones

la discusión sobre los símbolos ha llegado a ciertos "puntos finos o encrucijadas" que a veces acaloran la discusión

y que el profesor debe saber apaciguar. También ha ocurrido algo muy curioso con los distintos ejemplos que los alumnos han presentado en las sesiones correspondientes, sobre todo se muestran evidencias de lo controvertido que pueden ser los símbolos.

En cualquier caso, después de que nos convencemos que todos tienen una buena idea sobre el tema, planteamos una actividad en el salón de clases para recordar, usar, resignificar o redefinir algunas ideas.

Presentamos en seguida, a manera de ejemplo, una de las actividades que hemos echado a andar. En esta ocasión se trabaja primero en equipos de tres alumnos para luego hacer una plenaria y tomar acuerdos sobre la conclusión.

Dependiendo de las condiciones que se den en el grupo y el tiempo disponible para trabajar, hemos procurado dejar de 15 a 20 minutos para hacer las conclusiones, lo cual implica ponernos de acuerdo o designar los equipos que participan en la plenaria.

Cuando se tiene que designar a los equipos para la participación activa en la plenaria, generalmente se hace por el conocimiento de que en su trabajo previo por equipo logran conclusiones muy particulares que dan pie a una rica participación del grupo para obtener buenas conclusiones. Recomendamos se tome tal decisión en forma colectiva.

Antes de plantear la actividad quisieramos hacer incapié en que

siempre que haya la necesidad de presentar alguna situación al grupo, esta sea de agrado para ellos, es decir que de alguna manera el grueso del grupo muestre cierto interés por tal situación, y enfrentarla se convierta en un reto para ellos.

En seguida presentamos una actividad que hemos trabajado en alguna ocasión con nuestros alumnos, la cual nos permitió tener buen ambiente de trabajo y muy buenas conclusiones sobre este tema en particular.

Actividad 3

¿QUÉ ES ESTO?
Pensamiento Matemático
Fecha...

INSTRUCCIONES: Observe con mucha atención lo que se presenta a continuación. Conteste a las preguntas planteadas y haga lo que se pide.

1. ¿Qué es esto? Ver la figura 2.2.

Figura 2.2:

A manera de respuesta a la pregunta, haga una lista de todas las impresiones que les causa.
2. Someta a juicio tales impresiones, cuestiónelas y discuta con sus compañeros el por qué de tales impresiones. Anote sus conclusiones en cada caso.
3. ¿Tiene algo que ver con los símbolos? Explique.

Una variante de esta actividad que hemos trabajado en alguna ocasión, es la siguiente, tambien hemos trabajado con equipos de tres alumnos, y luego plenaria grupal para sacar nuestras conclusiones, que siempre han sido interesantes gracias a la buena voluntad de los alumnos en colaborar con nosotros.

He aquí una de varias modificaciones que hemos hecho.

Actividad 4

¿COMO HACERLO?
Pensamiento Matemático
Fecha...

INSTRUCCIONES: Explica a tu compañero cómo llegar a tu domicilio (casa). Conteste a las preguntas planteadas y haga lo que se pide.

1. ¿De qué echaron mano para lograr transmitir la idea?
2. ¿Tiene algo que ver lo que se usó con los símbolos? Explique.
3. En caso afirmativo. Haga una lista de los símbolos que se usaron.
4. Reflexione si esto se puede lograr sin el uso de símbolos.

Aunque se han logrado reflexiones muy singulares en este y en otros temas, dependiendo de las actividades y sobre todo de la actitud con que se enfrentan, mucho tiene que ver con la actividad, la forma que el profesor logra integrar al grupo y la reacción de los alumnos ante esta.

Intentaremos no escribir sobre las conclusiones para no influir en la actitud de querer llegar a ellas como dé lugar.

Lo importante es planear y hacer una buena actividad, y dirigirla de buena manera, y que entre todos se vaya conformando la conclusión sobre el tema en particular.

En la actividad 4, se puede presentar a los alumnos un dibujo o un objeto, y hacer la reflexión en torno a los símbolos. Por ejemplo, en alguna ocasión, eché mano al bolsillo, saqué la cartera y les presenté un "billete", en otra, una "fotografía", al mismo tiempo que se pregunta ¿qué es esto? y dependiendo de las respuestas hemos podido generar una serie de cuestionamientos, cuyas respuestas han dado lugar a reflexiones muy interesantes mismas que nos han permitido acercarnos al concepto de símbolo.

2.3. Un Símbolo Especial: La Proposición

Hay un tipo especial de enunciado –símbolo– que consideramos sumamente importante para estudiar y comprender una estructura general donde los conceptos tienen sentido, toman vida y finalmente se convierten en relevantes. Estamos hablando de las llamadas proposiciones.

Hagamos un poco de "historia".

Como sabemos todo mundo nace en un ambiente donde ya existe un lenguaje que podríamos llamar natural, con el cual nos podemos sentir muy elegantes, elocuentes o hasta poéticos –si se nos dá– al momento de comunicarnos. Aunque este lenguaje sea muy "florido", estas cualidades no sirven de mucho a otros miembros de la comunidad, por ejemplo a los arquitectos, profesores, ingenieros o a las personas que se dedican a las ciencias, etc. Y es que estos personajes requieren de un lenguaje con otras cualidades para comunicarse, pues sus ideas se deben transmitir en lo posible de forma precisa y concreta, por las mismas exigencias de su ocupación.

Por otro lado, es de esperarse que este lenguaje que llamamos natural está inmerso en un lenguaje gramaticalmente articulado, en esa zona geográfica. De este lenguaje, el hombre ha considerado ciertos enunciados con características muy especiales: las *proposiciones*.

De acuerdo a lo discutido en las lecciones pasadas hemos de entender que tales enunciados son tambien símbolos.

Así pues, al paso del tiempo el hombre ha ido dando forma a lo que ahora podemos llamar el lenguaje de las proposiciones, que como se verá es mucho más restringuido en sus significados y usos que el lenguaje natural o incluso que, en nuestro caso, el castellano. Sin embargo, es más preciso. Además por las cualidades mismas de las proposiciones es también concreto. Y en consecuencia, se convierte en el lenguaje adoptado por la ciencia.

Dado que este leguaje se construye a partir, en nuestro caso, del castellano, por supuesto que obedece a las reglas gramaticales del castellano, así como también a las nuevas reglas que se imponen a las proposiciones. Esta es la razón por la que muchos hacen referencia a este tipo de estructura como *lenguaje artificial o formal*.

En el libro *Los Elementos del Lenguaje de la Matemática 1* [2] del Dr. A. Fregoso, en su lección IV, se puede consultar algo relacionado con las proposiciones.

Generalmente cuando leemos sobre algún tema en particular, como el que nos ocupa, surgen nuevas palabras, que para ser coherente con lo discutido en la sección 2.2 de la página 25, estas son también símbolos.

Sugerimos, se indage en un buen diccionario, el de la Real Academia Española, por ejemplo, para que se aclaren los significados específicos a cada una de ellas. Recomendamos hacer extensiva esta sugerencia.

Recuerde que el lenguaje matemático requiere de la precisión. Por lo tanto, es saludable consensuar el significado de cada palabra desconocida o que de indicios de confusión.

En las próximas secciones discutiremos lo importante que resulta esta cualidad en las proposiciones para el efectivo tránsito de información entre las personas que necesitan –casi todos– no tanto de la elocuencia como de la claridad.

Ya que se tiene la información suficiente sobre las proposiciones, se debe buscar la forma de que se comprendan las características de estos nuevos símbolos.

Dependiendo de la situación y estado de ánimo que hemos logrado en el grupo, se puede hacer una o varias actividades para tal efecto.

En la práctica, en repetidas ocasiones han resultado más intrigante otros conceptos, que platicaremos más adelante, que las mismas proposiciones.

En tales circunstancias, y sin perder de vista nuestro objetivo de reconocer las características de las proposiciones, hemos optado por comprometernos a conseguir en forma individual dos enunciados: uno que creamos sea ejemplo de proposición y uno que no lo sea, con el fin de ponerlo a consideración en los equipos y que estos puedan expresar al grupo sus impresiones y/o ejemplos curiosos o interesantes.

También ha dado resultado conseguir, entre todos, buenos ejemplos de enunciados gramaticalmente correctos, para evitar desviar la discusión a la violación de las reglas gramaticales, es decir, a las faltas ortográficas. Con la intención de enumerar todas las cualidades que se le puedan reconocer a estos enunciados incluyendo las de *falso y verdadero*. Y fijar la atención en aquellas que comparten una de estas dos cualidades en especial, para hacer la distinción de las proposiciones de los demás enunciados.

Aunque en este curso no estamos interesados en hacernos especialistas en matemáticas, es bueno comprender cómo se puede transitar por este camino. El Dr. Arturo Fregoso, da sus puntos de vista en este sentido, en su libro *Los Elementos del Lenguaje de la Matemática 1* [2].

Sin importar la metodología, las fuentes, o la forma en que nos informemos en lo relativo a las proposiciones, aparecen necesariamente nuevos e interesantes términos, como lo hemos dicho antes. Por lo que consideramos buena la oportunidad de aclarar estos conceptos que son una especie de "bichos raros"; muy parecidos a las proposiciones. Algunos de los más interesantes son las contradicciones, tautologías, falacias y las paradojas.

Posiblemente en nuestra vida hemos tenido la oportunidad de encontrarnos frente a uno o más de estos enunciados o hechos bastantes curiosos que vale la pena distinguir de las proposiciones.

Ponemos a consideración un ejemplo de las actividades que hemos puesto en marcha con nuestros alumnos, con el objetivo de reconocer uno de estos conceptos. Por otro lado, presentamos la oportunidad de recordar otros conceptos como: área, triángulo isósceles, entre otros.

Actividad 5

EXPRESIONES CURIOSAS[2]
Pensamiento Matemático
Fecha...

INSTRUCCIONES: Dibuje sobre una cuadrícula un triángulo isósceles de 60 cuadritos de área, y corte en seis piezas como se ilustra en la figura 2.3.

Coloree las partes posteriores de cada pieza. Con las partes

[2]Ver [8].

coloreadas hacia arriba, forme un triángulo como el de la figura 2.4.

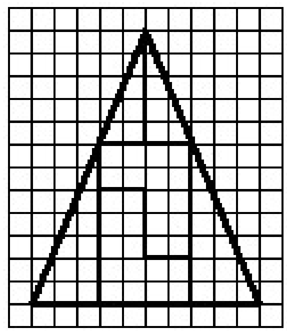

Figura 2.3:

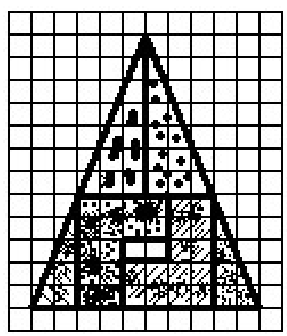

Figura 2.4:

1. ¿Qué observa en este nuevo triángulo?
2. ¿Las piezas coloreadas logran cubrir la misma área del triángulo original?
3. Reflexione por qué ocurre esto. ¿Hay algún error en este proceso?
4. ¿Se pueden acomodar las seis piezas de manera que se forme una figura con menos área?

5. ¿Tiene alguna relación con uno o más de los conceptos de: contradicción, tautología, falacia o paradoja? ¿Por qué?

Se pueden y se deben hacer otras actividades encaminadas a abordar los otros conceptos.

Sugerimos analizar otros enunciados o hechos "curiosos" que conduzcan a conceptos como los antes mencionados.

Intentamos persuadir al lector de la importancia que tiene comprender la estructura general de un lenguaje para poder comunicarse dentro del mismo. Al mismo tiempo reflexionar por dónde está la razón que orilla a no pocas personas a pensar que las matemáticas son incomprensibles.

Si queremos entrarle al mundo de las ideas, entender y comprender los conceptos y procedimientos propios del lenguaje matemático, debemos entender en forma general la estructura interna de tal lenguaje, de lo contrario, seguiremos aprendiendo por repetición, sin entender de lo que se trata.

Nos referimos al mundo de las ideas, pues el lenguaje matemático fue diseñado ex profeso para transmitir ideas, las cuales en ocasiones son muy complicadas. Y no es como en otras áreas. Por ejemplo en biología, donde enseñan las partes del cuerpo humano, los microbios, etc., que se pueden mostrar físicamente; las ideas no se pueden mostrar físicamante, ni con aparatos, es decir, sólo tienen un contenido intelectual.

Sin embargo, a manera de ensayo y sin olvidar lo "pintoresco" que puede ser nuestro lenguaje, partiremos de expresiones comunes para comprender lo importante que resulta la precisión de las expresiones en el lenguaje matemático. Sin duda, la mayoría de los ejemplos que se han mostrados de las proposiciones son relativamente sencillas, salvo raras excepciones a las que muchos llaman simples. Cuando nos referimos al término sencillo, estamos entendiendo que tales enunciados no tienen mayor complicación gramatical y semántica. Pero la realidad muestra que la vida no es así de simple, hay la necesidad de usar proposiciones mucho más elaboradas y complejas, no tanto en la parte gramátical como en la parte semántica.

2.4. ¿Cómo Generar Más Proposiciones?

Como hemos dicho antes, existe la imperiosa necesidad de formar proposiciones más "grandes" para poder comunicarnos.

La matemática echa mano de unas cuantas palabras y expresiones de nuestro lenguaje para combinar las llamadas proposiciones *simples* y formar otras, que gramaticalmante no representan complicaciones, sin embargo, tenemos que hacer un espacio para discutir la semántica de tales proposiciones, que muchos llaman *compuestas*.

¿Por qué es necesario invertir tiempo para ocuparnos de esto?

Nosotros tenemos que recordar que estamos empezando a analizar la estructura de un lenguaje que requiere de la precisión en el significado de sus enunciados. De lo contrario la información circularía por vías caóticas, lo cual traería serios problemas en la comunicación de las ideas.

Como se puede leer en la literatura, las palabras más comunes que se usan para enlazar las proposiciones son: "o", "y", "si ... entonces ...", "... es equivalente a ...".

Las primeras tres, generalmente nos las encontramos cotidianamente en nuestro lenguaje, tal y como las presentamos aquí. La última posiblemente no la hallamos en estos términos, pero sí con otras expresiones como: "dicho en otras palabras", "o, lo que es lo mismo", "como se dice vulgarmente", "lo anterior significa que", por citar algunas. Lo importante es que a todas estas expresiones le damos exactamente el mismo significado, es decir, *son equivalentes*.

Existe la posibilidad, igual que en la equivalencia, de encontrar otras expresiones que tambien le dotamos del mismo significado que la "o", "y" y "si ... entonces ...".

Insistimos se ponga atención en no perder el significado de tales expresiones para hacer la correspondiente relación.

En su momento mencionaremos algunas de las posibles formas de encontrar estas expresiones en nuestro lenguaje.

No queremos en esta ocasión, hacer de este tema una lección tradicional relacionada con lo que muchos han llamado, conectivos lógicos, pues esto no tiene mayor complicación. ¿Cuál es la dificultad para juntar dos proposiciones simples interponiendo entre ellas una de estas palabras o expresiones?, o ¿ para recordar la llamada tabla de verdad de estas nuevas proposiciones?.

Lo importante aquí es

reflexionar sobre lo que comúnmente se entiende de la proposición resultante y lo que deberíamos enterder de ella para que esta nueva expresión cumpla con lo que requerimos en el lenguaje matemático: *precisión*.

Y en consecuencia, contemos con los elementos para desempeñar un buen papel en el momento que nos toque manipularlas.

Es interesante buscar toda la información posible relacionada con la "o" y poder constatar que generalmente se refieren a ella por sus cualidades, si es verdad, mentira, etc., y se da por entendido el significado de la expresión; es más, algunos se atreven a decir que no importa el significado. Pero, ¿cómo podemos decir algo acerca de ella si no sabemos lo que significa?

Es claro pues, que para la estructura del lenguaje que nos ocupa –el matemático– juegan un rol fundamental estas expresiones. Esto quiere decir que debemos ocuparnos en analizar si hayalgún tipo de detalles en ellas, para poder usarlas en el lenguaje matemático sin dificultad. En este sentido, observe que hasta ahora hemos tenido la necesidad de ocupar insistentemente las comillas para remarcar tales expresiones y se pueda comprender lo que hemos querido decir.

Por ejemplo, el párrafo tomado de la página 38:

> Existe la posibilidad, igual que en la equivalencia, de encontrar otras expresiones que tambien le dotamos del mismo significado que la “o”, “y” y “si ... entonces ...”.

Pareciera entonces que tenemos dos tareas bien definidas: precisar el significado, y resolver el problema de la posible confusión cuando se escribe. De lo contrario, estas situaciones en nuestro lenguaje seguramente desencadenaran dificultades en el lenguaje que estamos analizando.

Por lo tanto, es mejor echarle un vistazo a cada uno de ellos.

Aunque el orden en que se presenta no es importante para abordarlos, de alguna forma refleja las dificultades que se han presentado en cada una de estas expresiones.

En varias ocasiones hemos apoyado a los alumnos para que sean ellos los que se encarguen de conducir los trabajos en torno a cada una de estas expresiones.

En todos los casos que nos ha tocado, cuando hay trabajo para los alumnos que requiere de especial atención, lo hemos señalado desde el inicio del ciclo, además hacemos sugerencias sobre la forma en que se debe desarrollar; en varios casos se ha pedido se haga por equipos, pidiendo que de acuerdo con la experiencia que nos ha tocado vivir en el transcurso del ciclo, se hagan cargo de la discusión de tal situación y se elabore alguna actividad que permita aclarar el significado de la expresión correspondiente.

Sin duda se ofrece y de hecho cuentan con nuestro apoyo como profesor en todo lo que se les ofrezca con el afán de conseguir el pleno desarrollo del tema y por consiguiente lograr nuestro objetivo.

Consideramos que la libertad para la búsqueda, desarrollo y elaboración de actividades para tal fin, son importantes.

2.4.1. La Expresión *o*

Primero nos ocuparemos en aclarar el significado preciso de la expresión "o".

Textualmente vamos a ver ¡que dice la "o¡

Aunque estamos bastante familiarizados con esta expresión, es casi seguro que si preguntamos, qué significa la "o" de nuestro lenguaje, nos van a responder dándonos diversas ideas, como: es la primera letra que aprendimos a escribir, es la penúltima vocal, es una letra del abecedario, etc. Pero, ¿alguna de estas expresiones nos aclara su significado? Es claro que ninguna de ellas responde a nuestra pregunta.

Posiblemente no hemos tenido la oportunidad de reflexionar o no se nos ha presentado la necesidad de tal situación. Sin embargo, ahora tenemos la oportunidad de tratar de buscar el significado a esta expresión, que dicho sea de paso, nos la encontramos a cada rato, dado el uso tan común que tiene en nuestro lenguaje. A veces, dependiendo del contexto y de las reglas gramaticales se escribe otra expresión por ella, tales como: "o bien", "u", etcétera.

Aclarando de buena manera el significado de esta expresión ya podemos trasladarla al mundo de las proposiciones con la precisión que se requiere.

Con el propósito de invitar a hacer una primera reflexión, nos permitimos citar un fragmento de un parrafo escrito en la sección 1.1 de la página 3, donde hemos usado sin mayor problema esta expresión.

> Compartimos la opinión de que en esta asignatura seguramente los alumnos tienen la oportunidad de recordar **o** resignificar algunos de sus conocimientos previos, ...

¿Qué entendimos en este parrafo?

Debemos hacer notar que ahora ya no pudimos usar las comillas y tuvimos que inventar otra forma de referirnos a ella dentro del texto y la palabra. Esto es nuestro segundo problema que tenemos que resolver para poder transcribir estas ideas al lenguaje matemático.

Pareciera que la **o**, a diferencia de otras letras de nuestro lenguaje, es como una monedita que muestra dos caras; tiene una doble identidad en nuestro lenguaje, es uno de los elementos base (elemento primitivo que carece de significado, según el Dr. Fregoso [2]) del lenguaje, y a su vez es una palabra que tiene significado por si sola. Por ejemplo, observe que no actúa de la misma manera en la palabra "rec**o**rdar" de la misma cita, que a la referida en la cita.

En las sesiones que han dirigido los alumnos se han tenido buenos ejemplos, pero sobre todo es de reconocer la actitud para las discusiones en este sentido, ya que han permitido tener un significado preciso de la **o**.

Este problema de la doble identidad es fácil de resolver, es cuestión de identificar la cara de la moneda de acuerdo al contexto en que se encuentra escrita la **o**. Pero siguen los problemas, ahora salen dos caras más de la **o**. Como se muestra en los siguientes ejemplos[3] que los alumnos han discutido, donde se aprecia tal diferencia de significados:

Ejemplo 1

1. *Mi perro está vivo o muerto.*

2. *Mi perro camina o ladra.*

Observe que hay una ligera diferencia del significado de la "o" en estos ejemplos.

De aquí que muchos hacen alusión a los términos "exclusiva", respectivamente, "inclusiva" para pegárselos a la "o" de acuerdo a la forma en que funciona dentro del contexto en que se encuentre.

Suponemos que esto es una forma de ir precisando su significado.

En algunas ocasiones las discusiones toman diferentes rumbos e intentan transitar por otras áreas del conocimiento, que creemos que no está mal, pero debemos delimitar nuestro campo de acción de acuerdo a nuestro objetivo.

Ahora echaremos mano de un "truco" tradicional que usamos los matemáticos para no vernos obligados a usar las comillas o hacer más grande la letra para hacer referencia a la "o" y evitar confusión al momento de escribir.

Haciendo esto, estamos en condiciones para usar la "o" como una maquinita que procesa proposiciones para producir más proposiciones.

[3] Tomada con autorización de una de las actividades de un grupo de alumnos.

Así pues, será mejor adoptar la postura de la práctica común que dice; en estos casos úsese un nuevo "gancho" para representar a la "o" y ¡listo!.

Podemos poner cualquier gancho que se nos ocurra, pero tampoco es algo nuevo, este problema ya esta resuelto, la gente se ha puesto de acuerdo en escribir "$\vee$" en vez de la "o", que tambien se entiende como "o inclusiva" y cuando hay la necesidad de referirse a la "o exclusiva" se usa generalmente el mismo gancho pero con una barra arriba $\overline{\vee}$. Digo generalmente, pues existen otros "ganchos" para esto último.

Observe que ahora nuestra letra "o" se ha convertido en un símbolo, pues consta de un "gancho" cargado de un significado preciso. Y no es casualidad que su significado sea quien invite a bautizarla como *disyunción* cuando se usa con las proposiciones, pues en efecto en la primera expresión del ejemplo 1 de la página 42 se presenta una disyuntiva del estado en que se encuentra el perro.

Con el fin de dejar un espacio para la creatividad y la imaginación, no mostramos ejemplo alguno de las actividades realizadas por los alumnos.

Nuestro propósito es dar a conocer el camino que se ha recorrido para cubrir esta parte del programa.

Debemos admitir que las expresiones que resultan del uso de la disyunción también tienen una de las cualidades de: Verdad (V), Mentira (F); mismas que hacen de ella una nueva proposición.

La cualidad que le corresponde seguramente depende en mucho de las cualidades que le correspondan a las proposiciones que la componen.

Para efectos de la comprensión de la negación, que veremos más adelante, es importante hacer ejercicios para identificar la cualidad que le corresponde a la proposición que resulta de la disyunción de dos proposiciones simples, dependiendo de las que se les asignen a estas últimas. Esto se puede hacer sometiendo a escenarios ficticios cada una de las proposiciones simples para que estas tomen una de tales cualidades y analizar, la cualidad que le corresponde a la proposición compuesta, de acuerdo a su significado.

Es claro que si enlazamos sólo dos proposiciones simples con la disyunción, hay cuatro posibles escenarios en los que puede actuar la proposión compuesta. Esta información se puede concentrar de alguna manera, una de las más comunes es usar una tabla, que muchos llaman "tabla de verdad" de la proposición.

Nótese que hemos llegado a la tabla de verdad de una proposición compuesta por la disyunción a partir de su significado y NO le hemos dado significado a partir de su tabla de verdad.

Este comentario tiene sentido pues cuando escuchamos la palabra proposición casi inmediatamente pensamos en tablas de verdad. Cuando la tabla de verdad de una proposición, simple y sencillamente, es un concentrado, en donde se encuentra información de las posibilidades que tiene la proposición de ser verdad o de ser mentira. Y *no* precisamente la tabla de verdad es la que carga de significado a la proposición, pues esta ya tiene su significado con o sin tabla de verdad.

Hay que reconocer que cuando se quiere incursionar en la teoría de las proposiciones, Lógica Matemática; esta maquinita llamada disyunción, puede producir proposiciones en las que sus componentes no tienen relación aparente. Sin embargo, esto se hace sin cambiar el significado que le hemos dado a la disyunción $\vee$.

Es importante insistir al profesor que ofrezca el apoyo a los alumnos para que ellos se hagan cargo de elaborar y dirigir alguna actividad relacionada con la disyunción.

2.4.2. La Expresión *y*

Al igual que la "o", esta expresión la podemos encontrar con frecuencia en nuestro lenguaje, lo cual refleja de alguna manera su importancia para comunicarnos.

Tambien la podemos encontrar escrita de diversas formas, dependiendo del contexto en que se encuentre y de las reglas gramaticales. "Pero", "también", "sin embargo"; son algunas expresiones a las que les atribuimos el mismo significado que la "y".

Pero, ¿Qué significa la "y¿

Posiblemente se puedan dar muchas respuestas distintas a esta interrogante. Pero también existe una alta probabilidad de que su significado siga quedando al margen de todas las respuestas.

La discusión se puede tornar muy similar a la que hemos hecho de la "o".

Concentremos nuestra atención en su significado.

Para ello reflexionemos sobre la idea que nos transmitió el párrafo que reescribimos en seguida y que fue tomado de la página 16.

> Muchos animales tienen, por así decirlo, una forma muy elemental de razonar **y** una manera sencilla de comunicar sus ideas. Pero, ...

Observamos que existe una diferencia con el significado que le hemos dado a la "o". Aquí como que ya no tiene lugar la disyuntiva que notamos cuando usamos la "o". Cuando usamos la "y", estamos expresando la idea de inclusión de cada parte.

En nuestra cita, se afirma que muchos animales, además de tener una forma muy elemental de razonar, tienen una manera sencilla de comunicar sus ideas. Aquí está presente una acción de juntar, *conjunción*; más que una disyunción como antes. Por lo cual, a más de una persona se le ha ocurrido referirse a la "y" como una conjunción cuando se usa para enlazar proposiciones.

Se ha convenido en usar un nuevo "gancho" para evitar las posibles confusiones que pueden presentar las comillas, para referirse a ella. Este es similar al usado para la disyunción pero con la diferencia de que ahora abre hacia abajo, "$\wedge$".

En las discusiones conducidas por los alumnos, ellos se han podido percatar de que las expresiones que resultan de enlazar dos proposiciones con esta nueva maquinita que llamaremos, como muchísima gente, conjunción; también tienen la cualidad que distingue a las proposiciones de otras expresiones correctamente elaboradas, esto es, podemos verificar en su caso, si es verdad o si es mentira. Además no puede ser verdad y mentira a la vez.

Así que tenemos otra máquina para producir más proposiciones.

No podemos dejar de hacer la misma recomendación que hicimos con la disyunción: practicar con ejercicios o con alguna actividad para poder identificar con cierta facilidad, cuándo una proposición compuesta por una conjunción es verdad o es mentira. Esto se puede hacer, no perdiendo de vista el significado que le hemos dado a la conjunción, y metiendo a la proposición compuesta en los diferentes escenarios hipotéticos posibles.

Claramente se puede ver que el resultado que se tiene, esta íntimamente relacionado con la veracidad o falsedad de las proposiciones que la componen. De aquí se puede tener, si se desea, la famosa tabla de verdad de la proposición compuesta por una conjunción.

Como veremos más adelante, para la negación de este tipo de proposiciones, es importante poder identificar cuándo es verdad o es mentira.

Insistimos en que los alumnos puedan presentar y dirigir, con el apoyo del profesor, alguna actividad relacionada con la conjunción.

2.4.3. La Expresión *si ... entonces ...*

Muchas personas se refieren a las expresiones que tienen, de alguna manera, la estructura "si ... entonces ..." como *condicional*. Posiblemente esto se debe a la idea que en efecto transmite; pone una condición para que ocurra un hecho.

Pero, ¿cuál es el significado preciso que hemos de dar a una expresión como esta?.

Debemos hacer notar que cuando nos referimos al término "preciso", estamos haciendo alusión a lo que debemos entender y lo que no debemos entender por tal o cual expresión, es decir, buscamos entender ni más ni menos de lo que dice la expresión con exactitud.

Nuevamente nos encontramos frente a una forma muy común de expresarnos en nuestro lenguaje cotidiano, será por su importancia en nuestra vida. Pero, si en la nuestra vida es importante comunicar ideas usando condiciones, en matemáticas es fundamental, pues es practicamente a traves de condicionales que se expresan muchos resultados de la ciencia.

A diferencia de otras disciplinas, las científicas no pueden darse el lujo de expresar sus resultados con enunciados ambiguos que se puedan prestar a varias interpretaciones, y en consecuencia se sumerja en un ambiente de incertidumbre. Conscientes de que vivimos inmersos en un mundo donde convivimos continuamente con aparatos y utencilios que son resultados fehacientes de la ciencia y la tecnología; resulta de suma importancia que aclaremos el uso correcto de las expresiones en cuya estructura se haga presente la condicional.

Razón demás para tomar un tiempo y entrar en materia.

Hagámoslo desde nuestro lenguaje cotidiano.

Recuerde que estamos interesados en la "maquinita"que procesa proposiciones.

Acotación que hacemos para ahorrarnos un poco de tiempo y concentrar nuestra atención en el manejo específico de proposiciones.

A manera de ejercicio, hágase una reflexión sobre la idea que transmite comúnmente la expresión[4]:

Ejemplo 2
"Si me haces la tarea, te invito al cine"

Antes de ver lo que significa, pero sobre todo lo que no significa –ya veremos por qué–, observe que efectivamente se trata de un enunciado que de alguna manera tiene la estrutura que estamos discutiendo, aunque no tiene la palabra "entonces". De hecho, en la vida práctica nos encontramos enunciados en cuyo contenido podemos ver que imponen condiciones para que ocurra alguna cosa, y no tienen explícitamente la forma "si ... entonces ...".

En seguida citamos sólo algunas de las más comunes, aunque posiblemente se puede hacer una lista más larga.

1. Si ..., ...
2. De ... se sigue ...

[4]Ejemplo dado por un alumno.

3. ... implica ...

4. ..., sólo si ...

5. Para ... es necesario ...

6. ... es suficiente para ...

Algunos autores, como se puede ver en [5], han sacado largas listas de expresiones que están cargadas con el mismo significado que la condicional.

No podíamos dejar de citar las últimas tres formas de encontrar la condicional, sobre todo tomando en cuenta las discusiones dadas con nuestros alumnos en varios grupos, en relación a las nuevas expresiones o palabras que intervienen; "sólo si", "necesario" y "suficiente".

Hemos pasado, en ocasiones, días y días tratando de delimitar el significado preciso de estas expresiones.

Recomendamos se busque el significado a tales expresiones o palabras con los alumnos. Aunque se invierta un poco más de tiempo, creemos que es importante que los alumnos hagan la indagación correspondiente y se pueda llegar a un acuerdo en el grupo con la asesoría del profesor.

Seguramente se tendrán interesantes comentarios sobre la expresión del ejemplo 2, de la página 48, que esperemos se puedan ir discutiendo para efectos de afinar el significado de tal expresión, y en general ir caminando en busca del significado de la condicional.

Con la disyunción y la conjunción no nos hemos ocupado de explicar con detalles los resultados de las discusiones dadas en los grupos que hemos atendido, pues confiamos, como ha ocurrido en la mayoría de los casos, que se pueden dirimir las cuestiones que se presenten en el camino hacia la aproximación del significado preciso de expresiones con tales estructuras. Sin embargo, por la gran utilidad que tiene la condicional en prácticamente todas las áreas de la ciencia, —hasta en derecho— platicaremos con más detalles las conclusiones a las que hemos llegado, y en la medida de lo posible explicaremos cómo hemos llegado a ellas.

Nos permitimos pues, tomar un ejemplo de una condicional que propusieron los alumnos de un grupo[5] de la División Académica de Ciencias Básicas y que dio pie a un buen tiempo de discusión entre ellos. Pero que al final del curso se sintieron muy complacidos de lo hecho en las sesiones de clases.

Ejemplo 3
Si la chica es guapa entonces tiene novio.

Intentaremos transmitir someramente las ideas que corrieron en todas direcciones con este ejemplo.

Cuando se pregunta, ¿qué significado tiene esta expresión? Salieron varias respuestas, intentando justificar por todos los medios posibles sus fallos.

Una de ellas, que aparecía insistentemente, es la que se lee de manera textual, en donde no hay que discutir. Según nuestra afirmación, *las chicas guapas tienen novio.*

Otra respuesta muy común –si no lo cree, revise las respuesta que dieron al ejemplo 2, de la página 48– *las chicas que no son guapas, no tienen novio.* Lo hemos escrito de esta manera para no meternos en otro tipo de discusión, pues aquí intentan negar ambas acciones, y más de uno, se refiere a las *chicas feas* en donde nosotros hemos escrito *las chicas no guapas.* Pero bueno, de las

[5] QEPD una de sus compañeras.

negaciones platicaremos más adelante. Lo interesante ahora es que creemos que aquí si hay materia de discusión en relación al significado de la expresión.

Cuando se les cuestiona de dónde tomaron la información que se da sobre las chicas no guapas, se motivaron a reflexionar sobre este punto. Y después de una larga jornada de discusión y reflexión pudieron llegar a concluir que no hay información alguna sobre las chicas no guapas en la expresión del ejemplo 3. De tal suerte que esta expresión no dice algo sobre las chicas no guapas.

Nos quedan dos posibles escenarios a discutir a partir de nuestra expresión: ¿Son guapas las chicas que tienen novio? y las que no tienen novio, ¿son guapas?.

Es muy interesante conocer los argumentos que se dan a las posibles respuestas a estas preguntas.

Además de que este tipo de discusión nos pueden servir para comenzar a conocer a nuestros alumnos, a que ellos pierdan el miedo de expresar y defender sus argumentos, seguramente nos podemos dar cuenta de que muchas de las respuestas al fin empiezan a converger.

En nuestro caso, y en otros más, aunque con otras expresiones, se han podido convencer de que, las chicas que no tienen novio, seguramente no son guapas, pues de de lo contrario, es decir, si fueran guapas, según nuestra expresión, deberían tener novio. Pero hemos partido del hecho de que no tenen novio.

Y finalmente, por mucho que le hemos dado vuelta a la respuesta a la última pregunta, esta nos ha conducido a la incertidumbre en su respuesta. Es decir, no podemos afirmar con certeza que son guapas, tampoco que no lo son. En conclusión, nuestra expresión no nos da información sobre las chicas que tienen novio.

Incluso, han llegado en este caso, a hacer un diagrama como el que se muestra en la figura 2.5 de la página 52, para apoyar sus argumentos.

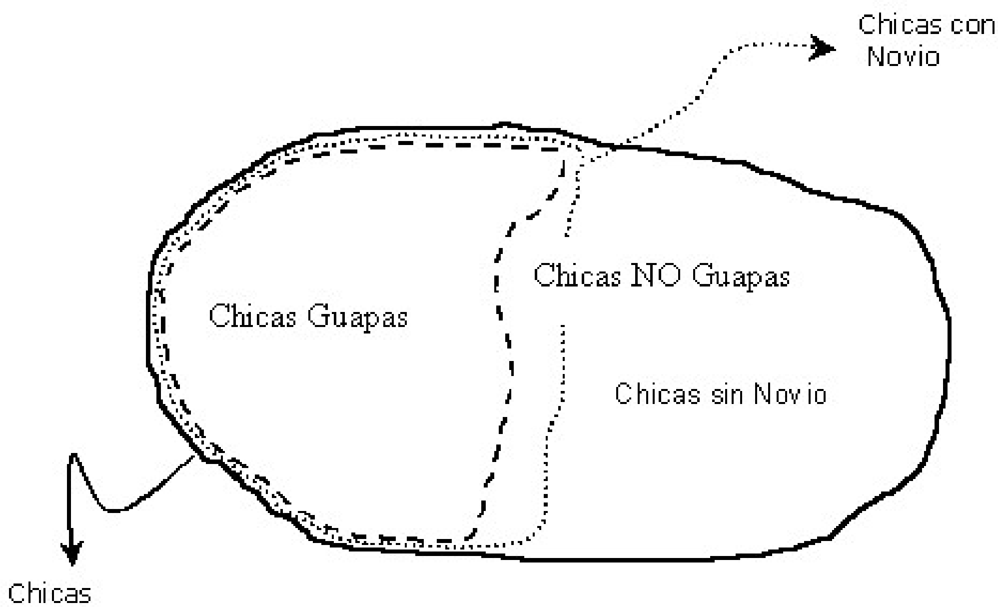

Figura 2.5: Diagrama que resultó de la expresión condicional.

Como hemos mencionado antes, lo importante del trabajo de esta discusión es que los propios alumnos se puedan convencer con buenos argumentos y puedan concluir acerca de lo que se les cuestione, con el afán de que descubran cúal debe ser el significado preciso de una proposición condicional.

Aclaramos que las ideas anteriores fueron escritas, después de cribar de alguna manera, todas las ideas que circularon alrededor de esto, tanto que se tuvo que dejar a un lado, y con razón, la discusión sobre las palabras abstractas y subjetivas que entraron en juego, como la palabra "guapa". Aún prescindiendo de esto, se pudo llegar a aclarar con cierto grado de aproximación, el significado preciso de una expresión con una estructura condicional.

Esta es otra forma de generar una proposición a partir de dos ya dadas. Tenemos pues una nueva "maquinita" que toma dos proposiciones y nos genera una nueva proposición, que comúnmente se llama *proposición condicional*.

Para aclarar el significado de las expresiones "necesario", "sólo si" y "suficiente", se sugiere se den ejemplos de proposiciones condicionales escritas usando estas frases y que se reescriban en la forma tradicional usando la expresión "... si entonces ...".

Se puede, nosotros lo hemos hecho en algunos casos, discutir la veracidad de las proposiciones condicionales. Aunque, ya no es tan evidente como en las disyunción y la conjunción. La sugerencia para hacerlo es la misma que hemos repetido en dos ocasiones; para la disyunción y para la conjunción.

Nos ocuparemos, en este sentido, de la expresión dada en el ejemplo 3, analizando cuatro posibles escenarios que pueden presentarse. Advertimos que en muchos casos las siguientes conclusiones son resultado de acaloradas pero nutridas discusiones.

Primer escenario.

Supongamos que estamos frente a una chica guapa que se encuentra acompa nada con un chico, le preguntamos que parentesco tiene con ella, a lo que responde: es mi novio. Observe que estamos en una situación en donde las dos proposiciones que componen nuestra proposición condicional, son ciertas. ¿Es cierta nuestra proposición? Casi todos contestan que sí, porque al darse la condición, es decir al ser guapa, se espera que tenga novio, como ocurre en este caso. Situación que no nos genera ninguna controversia.

Segundo escenario.

Supongamos una situación similar a la anterior, sólo que ahora nuestra chica contesta que no es su novio. Observe que estamos en una situación en donde la primera proposición que compone a nuestra condicional es cierta, es decir, la chica es guapa. Pero la segunda no es cierta. ¿Lo que se dice en nuestra proposición, es cierto? Después de tanto discutir en relación a la respuesta. Se llega a la conclusión que no puede ser cierta, y dado que es una proposición, debe ser falsa. Porque al darse la condición, es decir al ser guapa, se espera que tenga novio, y no ocurre en este caso. En conclusión, lo que se afirma en nuestra proposición es mentira.

Tercer escenario.

Supongamos ahora que estamos frente a otra chica, que no es guapa ni tiene novio. Observe que estamos en una situación en donde ninguna de las dos proposiciones que componen nuestra proposición condicional es cierta; ambas proposiciones componentes son falsas. Bajo este supuesto, ¿se miente con nuestra proposición condicional?

Para responder esta pregunta, en este y en todos los escenarios, no se pierda de vista el significado que le hemos dado a nuestra proposición. En este caso es importante recordar que de acuerdo a nuestra proposición condicional podemos afirmar que si la chica no tiene novio seguramente no es guapa, porque si lo fuera tendría novio.

Tomando en cuenta todo lo que ocurrió en el grupo y pendientes de que se tomara en cuenta lo antes dicho, casi todos los alumnos se logran convencer que bajo este escenario, nuestra proposición condicional no puede ser falsa, en consecuencia, es cierta. Ya que para que sea falsa, al saber que no tiene novio, debería ser guapa; que no es el caso.

Cuarto escenario.

Finalmente presentemos la situación más conflictiva, al menos así se presentó en el grupo, pues implicó más dificultad para tomar una decisión sobre la respuesta a la pregunta que hemos planteado en todos los escenarios anteriores sobre la veracidad o falsedad de nuestra proposición del ejemplo 3.

Supongamos que estamos frente a una chica que no es guapa pero que tiene novio. Observe que ahora estamos en una situación en donde la primera proposición que compone nuestra proposición condicional, no es cierta; es falsa. Aunque la segunda es cierta. La discusión gira alrededor de la respuesta a la pregunta, ¿Lo que se dice en nuestra proposición es mentira?

Tenemos que remarcar que en este caso los alumnos le buscaron por aquí y por allá, y tuvimos que ocuparnos en encauzar y cuestionar sus argumentos, y que no perdieran de vista el significado de nuestra proposición.

Después de batallar un buen rato, nos hemos dado cuenta que nuestra proposición no dice mentira, ¿Por qué?. Es decir lo que dice es verdad. ¿Por qué?

Los resultados que hemos obtenido en los cuatro escenarios anteriores se pueden concentrar en una tabla; tabla de verdad de nuestra proposición condicional del ejemplo 3.

Hacemos notar que

todas las tablas de verdad; de la disyunción, de la conjunción y la condicional, realmente no dependen del significado de las proposiciones que la componen, sino de la estructura que tienen como disyunción, conjunción o condicional.

En consecuencia, ya no se dice tabla de verdad de nuestra proposición particular, como si cada proposición tuviera una tabla, sino tabla de verdad de la disyunción, de la conjunción o la condicional, pues sin importar las proposiciones que las componen, las tablas permanecen invariantes. Además, cuando se hace álgebra (teoría) con las proposiciones (lógica matemática), ya no es importante la oración gramatical ni siquiera el significado de las proposiciones que componen a la disyunción, conjunción o condicional. Razón demás para poner un nuevo "gancho" –símbolo– en vez de tales proposiciones componentes. Por ejemplo, es muy común ver en los libros, haciendo referencia al ejemplo 3, que se escriba:

p: La chica es guapa.

Lo cual quiere decir, escríbase p en vez de la proposición, *La chica es guapa.*

q: La chica tiene novio.

Lo cual quiere decir, escríbase q en vez de la proposición, *La chica tiene novio.*

Luego, en vez de escribir la oración completa para la proposición:

Si la chica es guapa entonces tiene novio,

se escribe:

$$p \Rightarrow q$$

El símbolo $\Rightarrow$ se usa para indicar la estructura de la condicional si ... entonces ... en la proposición.

Pero bueno, nosotros no estamos interesados en esto por ahora, salvo que se quiera estudiar alguna carrera que requiera de estos menesteres.

Suponemos que a estas alturas los alumnos ya han llevado a cabo alguna actividad relacionada con la condicional.

Es importante insistir al profesor que ofrezca el apoyo a los alumnos para que ellos se hagan cargo de elaborar y dirigir alguna actividad relacionada con la condicional.

2.4.4. La Expresión ... *es equivalente a* ...

No podemos dejar de discutir esta estructura que será la última que trataremos en este apartado. Por dos razones principales; porque normalmente se usa en nuestro lenguaje cotidiano, aunque como hemos dicho antes, posiblemente con otras expresiones pero que transmiten la misma idea que una proposición con la estructura ... *es equivalente a* ..., y además porque es una de las estructura básicas muy útil entre la comunidad científica.

Podemos enumerar una lista de las posibles formas diferentes de encontrar esta estrutura en la vida práctica[6], entre ellas:

1. ... es equivalente a ...
2. ... sí y sólo si ...
3. ... es necesario y suficiente para ...

Posiblemente no es tan claro por qué a una equivalencia se le llama *bicondicional*. Creemos que es importante reflexionar un poco sobre la palabra *equivalencia*.

[6]Se pueden consultar otras en [5].

Despues de ello hemos tenido la oportunidad de aclarar que se trata, ni más ni menos, que de una igualdad de significado entre dos o más expresiones, en nuestro caso proposiciones. Así pues, cuando se tienen dos proposiciones equivalentes, de la primera se tiene la segunda, y viceversa, de la segunda se tiene la primera, es decir se tienen dos condicionales.

Así que una expresión con una estructura bicondicional se puede entender como la conjunción de dos condicionales.

También existe un símbolo para la bicondicional, que usamos los que tenemos tal necesidad en nuestras actividades. Aunque hay algunas variantes, el más común en la literatura específica es $\Leftrightarrow$.

Nótese que nuevamente la veracidad o falsedad de una bicondicional depende directamente de la veracidad o falsedad de las proposiciones que la componen.

Al someter una bicondicional a los cuatro escenarios que planteamos en la sección 2.4.3, resultó que nuestros alumnos se han podido convencer, sin mayores problemas, que al ser una equivalencia, esta resulta mentira cuando una de las dos proposiciones que la componen es mentira y la otra es verdad. Sin embargo, aún siendo ciertas ambas proposiciones que la componen, o ambas falsas, la equivalencia es verdad. Cabe se nalar que en este último caso, cuando las dos son mentiras, hubo que invertir un buen tiempo para conducir las discusiones al respecto a fin de que pudieran llegar a tal conclusión.

Tenemos hasta ahora cuatro formas básicas para construir más proposiciones a partir de otras ya dadas. Lo importante es que en la medida en que interconectemos estas cuatro "maquinitas" tenemos verdaderamente grandes fábricas para generar proposiciones, y que lo único que necesitan como insumo son proposiciones.

Aunque salen otras expresiones como "existe" y "todo" que muchos llaman *cuantificadores* porque de alguna manera se refieren al número de entes que juegan en una proposición, como se muestran en las siguientes proposiciones, las cuales vamos a separar para efectos de referencias posteriores.

Ejemplo 4
"En el árbol hay un pajarito"

Ejemplo 5
"Todos los hombres piensan"

Observe que en el ejemplo 4, se trata de la *existencia* de un pajarito en el árbol. Y en el ejemplo 5, se hace referencia textual a la palabra *todo*. Esperemos que el significado a estas expresiones sean claras, de lo contrario sugerimos plantearlos en el grupo para su discusión. Volveremos a tocar este tema más adelante.

Terminamos esta sección diciendo que lo importante de nuestro trabajo hasta este momento es que todos vamos aprendiendo a usar las palabras y/o expresiones como símbolos, que como ya sabemos, estos están cargados de un significado preciso.

2.5. ¿Qué Significa Negar una Proposición?

Entramos ahora a un tema que generalmente consideramos con relativa ligereza de tal manera que muchos admitimos que negar una proposición es muy sencillo. Y en efecto, esto puede ser así, pues en muchos casos es cuestión de agregar la palabra **no** a la proposición en el lugar apropiado.

El problema que nos ocupa ahora no es precisamente cuándo y dónde poner la palabra "no", sino poner nuestra atención en lo que queremos dar a entender con tal expresión cuando ya le hemos puesto este adverbio en el lugar adecuado.

Es decir, estaremos interesados en el significado de la nueva expresión.

Veamos dos ejemplitos, uno de la disyunción y otro de la conjunción a las que hemos hecho referencia en la sección anterior. Consideremos para empezar la segunda proposición dada en el ejemplo 1 de la página 42, que dice:

Ejemplo 6
Mi perro camina o ladra.

Si obligamos a una persona, con aptitudes para hacerlo, claro está, a que nos escriba la negación de esta disyunción, seguramente tendremos diversas presentaciones de nuestra petición.

Escojamos una, que a decir de nuestros alumnos, es una de las que se acerca más a nuestra petición, aunque tenemos que discutir si es o no, la que expresa con mayor claridad lo que se quiere decir.

No es cierto que el perro camine o ladre

Aclaramos que entre las presentadas, muchas fueron desechadas por ellos mismos, pues no respondían a lo que se pedía.

Por otro lado, observe que aparentemente no hay mayor dificultad para intentar comunicar la idea, de algún modo opuesta, a la dicha por nuestra proposición, sólo agregamos la frase "no es cierto que" al principio de la proposición y ¡listo!.

Como fórmula para hacerlo no representa dificultad alguna, ni siquiera para ense narla en una clase tradicional, ¿cuánto tiempo nos puede ocupar decir a los alumnos que escriban, “no es cierto que”, antes de la proposición dada?

Como nos podemos dar cuenta, lo maravilloso de esto es que no sólo funciona en esta, sino que en cualquier otra proposición que se nos dé para negarla, podemos hacer exactamente lo mismo sin problemas. Pero, ¿cuál es la idea que transmitimos con esta última proposición?, es decir, ¿qué significa este nuevo símbolo?

Si podemos aclarar este asunto, posiblemente encontremos una forma más explícita de comunicar con más claridad la negación de nuestra proposición.

Nótese, sin perder de vista el significado que tiene la proposición del ejemplo 6, como ya hemos referido antes, que podemos identificar por la composición de la expresión, cuatro posibles escenarios que pueden ocurrir en relación a lo que dice la proposición. De los cuales sabemos que en tres de ellos, ¿cuáles?, lo que se afirma es verdad, ¿por qué? Y en el escenario restante, lo que se dice no es cierto, ¿por qué?. También recordamos que en el juego con las proposiciones, es claro que si la idea de una proposición es verdad, la negación, que contiene la idea de alguna forma opuesta, debe ser mentira, y viceversa.

Así que alguien puede preguntar, ¿Qué nos está diciendo entonces esta nueva proposición?

Acaso nos dice que el perro en cuestión ¿camina y a la vez ladra?, o tal vez nos quiere decir que ¿ni ladra ni camina?, o será que nos debe transmitir la idea de que nuestro perro ¿ladra pero no camina?, o finalmente, ¡ya no tenemos opciones! nos estará diciendo que el dichoso perro ¿camina pero no ladra?

De las respuestas a estas interrogantes, seguramente tendremos una idea más clara de lo que nos transmite la proposición que dimos como negación a nuestra proposición del ejemplo 6, y en consecuencia, tal vez podremos reescribirla de tal forma que nos quede más claro lo que se quiere decir.

Escriba la negación en forma explícita.

¿Qué relación tiene con la conjunción?

Algunos grupos se han sentido emocionados, de tal forma que han llegado hasta una de las equivalencias del álgebra de la Lógica Matemática. En tales casos han aflorado varios comentarios. Uno de los que nos llaman la atención es que han comentado textualmente que

"hemos llegado a la fórmula caminando de lo calientito a lo frío".

Haciendo referencia a que las expresiones algebraicas, en la mayoría de los casos no les dice algo, son frías; sin embargo, las discusiones han sido cálidas y en este trance lo que hacen tiene algún significado para ellos, lo cual les permite no sólo discutir, sino hacerlo argumentando sus ideas. En consecuencia, la fórmula a la que ellos hacen referencia tiene un significado específico.

En cuestionamientos similares podemos entrar con las conjunciones, que como ya sabemos son proposiciones enlazadas con una "y". Por ejemplo, analizamos la negación de la proposición

Ejemplo 7
Mi hermana se cayó y se golpeó.

Suponemos que tenemos claro el significado de esta proposición. Y además, sabemos cuándo es verdad y cuándo es mentira. Ver la seccción 2.4.2, página 45.

Pero, ¿Cuál es la negación de la proposición 7?

Seguramente tendremos múltiples respuestas diferentes. Sugerimos se haga una lista de todas ellas.

Para ahorrarnos tiempo y espacio, tomemos una de ellas, la que resulta de la fórmula de la discusión anterior, finalmente es un método eficaz para escribir la negación. Esto no está a discusión, lo que nos preocupa es la claridad con que se transmite la idea que se desea.

No es cierto que mi hermana se haya caído y golpeado.

¿Que nos quieren decir con esta proposición? ¿Es claro su significado? ¿Qué pudo estar ocurriendo con mi hermana según esta proposición? ¿Se cayó y se golpeó?, o tal vez nos dice que ¿ni se cayó ni se golpeó?, o bien, que ¿se cayó pero no se golpeó?, o posiblemente que ¿se golpeó pero no se cayó?

Sugerimos se aclaren las respuestas a estas interrogantes, con el ánimo de conseguir la idea clara que nos debe transmitir la negación a la proposición del ejemplo 7.

Para efectos de conseguir las respuestas a estas interrogantes, debemos considerar que nuevamente tenemos cuatro posibles escenarios para someter a la proposición del ejemplo 7. Pero ahora en uno de ellos, ¿cuál?, lo que se afirma en la proposición es verdad, ¿por qué? y en los tres restantes, ¿cuáles?, es mentira, ¿por qué?

Tomando en cuenta la dualidad en la veracidad de una proposición y de su negación, podemos comprender mejor el contenido de la negación de la proposición del ejemplo 7, y en consecuencia, podremos reescribirla en forma explícita para mayor claridad.

Escriba la negación en forma explícita.

¿Tiene alguna relación la negación de la conjunción con la disyunción?

Al igual que en el ejemplo 6, si se interesan por ello, es bueno conseguir la equivalencia algebraica de la negación de la conjunción. Esto se logra cuando los alumnos sienten la necesidad de ocupar ciertos símbolos para representar las proposiciones, es hasta entonces, cuando ellos están en condiciones para conseguir tal o cual fórmula algebraica de la Lógica Matemática.

En varias ocasiones han surgido otro tipo de proposiciones, que tienen expresiones como las presentadas en la página 59.

En un grupo de la DACB, los alumnos propusieron en una de sus actividades una proposición, que dicho sea de paso estaba inmersa en un texto, pero para efectos de analizar aquí específicamente su negación nos permitimos escribir sólo la proposición.

Ejemplo 8
Todos los tomates de la caja están en buen estado.

Se dice que esta expresión tiene un cuantificador contenido en la palabra "todo".

Cuando alguien dice que lo que aquí se afirma es mentira, lo cual, según los se nalamientos anteriores podemos escribir sin mayor dificultad de la siguiente manera:

No es cierto que todos los tomates de la caja
estén en buen estado

¿Esta última proposición transmite la idea en forma inteligible?, ¿qué tan claro es lo que nos está diciendo? ¿En qué estado se encuentran entonces los tomates? y ¿cuántos tomates están así?

Para ayudarnos a responder estas interrogantes, podemos reflexionar, ¿por qué alguien dice que la proposición del ejemplo 8, no es cierta?, ¿qué vio en la caja de tomates? o más bien, ¿cómo los vio? y a ¿cuántos vio en esas condiciones?

Las respuestas a estas preguntas seguramente nos darán la pauta para entender mejor el significado de esta última proposición.

Y en consecuencia, podremos tener posiblemente otra alternativa para expresar tal idea con mayor claridad.

Escriba esta última proposición en forma clara.

Regresemos al ejemplo 4 de la página 59, que dice:

Ejemplo 9
"En el árbol hay un pajarito"

Una vez más, en el ejemplo 9, aparece otro de los cuantificadores que hemos citado en la sección 5 de la página 59, contenido en la expresión "hay un".

La invitación es a que se reflexione sobre el contenido es esta proposición, pero sobre todo lo que se quiere transmitir cuando una persona afirma que lo que se dice en la proposición no es cierto, para escribirla de tal manera que no se preste a confusión, como puede ocurrir cuando se escribe, con el mecanismo usado antes,

No es cierto que en el árbol haya un pajarito

Observe que efectivamente, esta última proposición puede tener varias interpretaciones, efecto no deseable para nuestro lenguaje formal.

Capítulo 3

Situaciones Problemáticas

En este capítulo presentamos algunas actividades y una serie de problemas (situaciones problemáticas) relacionadas con el contenido marcado en el programa oficial de esta asignatura. Algunas de las cuales hemos planteado a los distintos grupos de alumnos con los que nos ha tocado trabajar, y otras que no hemos trabajado, pero que ponemos a consideración.

Esperamos sirvan de guía tanto a los alumnos que deseen participar en los trabajos de esta asignatura, como a los profesores interesados en trabajar estas ideas que implica tener presente una nueva visión del quehacer docente.

Los hemos clasificado en dos categorías. Aquellos que tienen alguna relación específica con los detalles semánticos de los conectivos lógicos (lenguaje) y aquellos otros que tienen alguna relación con los conocimientos previos marcados en las dos últimas unidades del programa.

De acuerdo a lo discutido en estas notas, hemos de considerar que el trabajo que se desarrolla en el salón de clases es muy importante para lograr nuestro objetivo, y estas actividades y problemas que presentamos vienen siendo como el guión, que no deja de ser importante, para establecer un ambiente propicio en el que los alumnos tengan la oportunidad de crear, desarrollar, descubrir, manipular y aprehender los conocimientos matemáticos que se desean y al mismo tiempo puedan desearrollar las habilidades del pensamiento que les permita un mejor desempeño en su vida cotidiana.

Es ahora una excelente oportunidad para sugerir que en la medida de lo posible y de acuerdo a las situaciones particulares de los alumnos de cada grupo

se proponga a los implicados en los problemas que se plantean, se tomen como plataforma los problemas y/o sus soluciones para presentar nuevas versiones de estos, cambiando o variando, datos, escenarios, etc. Además de buscar la posibilidad de particularizar o en su caso generalizar alguno de ellos.

3.1. Sobre los Conectivos Lógicos

Consideramos que el ambiente de trabajo en el salón de clases es completamente distinto en cada grupo y en cada ocasión. Por lo tanto, es recomendable tratar de diseñar las actividades y situaciones problemáticas de acuerdo a la situación particular que presenta cada grupo. Sin embargo, presentamos en seguida algunas de las que hemos elaborado para nuestros alumnos.

En general las hemos trabajado por equipos de tres o cuatro estudiantes y al final siempre hemos considerado un tiempo prudente para cerrar y hacer las conclusiones en la plenaria.

Estas están planeadas para sesiones de 90 minutos aproximadamente.

A pesar de que en ocasiones se han presentado situaciones especiales que no han permitido terminar completamente con todos los puntos marcados en la actividad, aún así, tratamos de hacer la plenaria y concluir cuando la misma actividad lo permite.

Actividad 6

CHAN Y CHON
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere lo que se plantea a continuación. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

En alguna ocasión platicaban dos estudiantes que llamaremos Chan y Chon, en la cafeteria de la escuela sobre la situación de uno de ellos y es que Chon, por razones personales no habia estudiado y en dos horas tenia examen. Por lo que le pide la opinión a su amigo Chan sobre su problema, y a pregunta expresa de Chon: ¿Qué hago Chan?, este responde, no queda de otra, *o bien repasas lo que se pueda en estas dos horas, o bien le platicas al maestro tu situación para ver que te propone*.

Siguieron platicando un poco más y se despidieron.

Chon camina un poco por el pasillo y reflexiona:

1. Voy a hacerle caso a Chan, es mi amigo y creo que tiene razón. ¿Qué está pensando hacer Chon? Explique.

2. Pero que tal y me está jugando "chueco". Mejor no le hago caso. Total ya ni modos, además, posiblemente Chan me quiere hacer sufrir. ¿Qué está pensando hacer ahora Chon? Explique.

3. Concentre la información obtenida sobre lo que pensaba Chon en la pregunta 1 y 2.

4. ¿Chan usó algún conectivo lógico para responder la pregunta de Chon? ¿Cuál?. Escríbela en forma clara y usando este conectivo.

Actividad 7

CHAN Y CHON. Continuación.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____________________________________

INSTRUCCIONES: Considere la actividad 6, CHAN Y CHON. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

5. Reflexione en qué caso(s) considera Chon que lo que le dijo su amigo es verdad y en qué caso(s) lo considera mentiroso,es decir, cuándo la proposición que resulta de la pregunta 4 es verdad y cuándo es mentira. Concentre nuevamente esta información.
6. Discuta cuál es la expresión que expresa la "idea contraria" a la que dijo Chan. Escríbala en forma clara.
7. ¿Qué conectivo lógico se usó en la proposición que se dio en la pregunta 6? Observe qué relación guardan estos.
8. Dé otros ejemplos para ver si la relación dada en la pregunta 7 sufre algún cambio cuando se cambia la proposición que usa el conectivo dado en la pregunta 4.

Actividad 8

LILA Y LOLA
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere lo que se plantea a continuación. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

Lila y Lola son dos buenas amigas que siempre se platican sus cuestiones de amores. Lila ya tiene novio pero Lola anda en eso. Lila le pregunta a Lola cómo es su pretendiente, a lo que ella responde, *no es guapo pero es inteligente.*

1. Hay algún conectivo lógico en la respuesta que le dio Lola a Lila, ¿Cuál?. Escriba la respuesta de Lola con este conectivo e identifique las proposiciones que la componen.
2. Examine bajo qué condición(es) de veracidad (verdad, mentira) de las proposiciones componentes, la proposición que se dio en la pregunta 1 es verdad.
3. Examine bajo qué condición(es) de veracidad (verdad, mentira) de las proposiciones componentes, la proposición que se dio en la pregunta 1 es mentira (falsa).
4. Concentre las respuestas a las pregunta 2 y 3.

Actividad 9

LILA Y LOLA. Continuación.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere lo que se plantea en la actividad 8; LILA Y LOLA. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

5. Reflexione y discuta cuál es la expresión que expresa la "idea contraria" a la respuesta que dio Lola a Lila. Escríbala en forma clara.
6. ¿Qué conectivo lógico se usó en la proposición que se dio en la pregunta 5? ¿Es el mismo que se usó en la pregunta 1 de la actividad 8? ¿Qué relación guardan entre ellos?
7. Considere otros ejemplos y observe si se tiene la misma relación.
8. ¿Sufre algún cambio la relación encontrada en la pregunta 6 con las que se dan el los ejemplos del punto 7?

Actividad 10

EL PRESIDENTE.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*______________________________________

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente proposición presidencial. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

Si soy presidente electo de México entonces bajaré el precio de la gasolina

1. Reflexione sobre esta proposición y por otro lado examine el significado de la palabra **necesario**. *Escriba esta proposición usando la palabra* **necesario** *cuidando de no cambiar el significado de la proposición.*
2. Haga lo mismo que en la parte 1 pero con la palabra **suficiente**.
3. Haga lo mismo que en la parte 1 pero con la frase **sólo si**.
4. ¿Qué relación guarda la proposición

si no bajó el precio de la gasolina entonces no fui presidente electo de los mexicanos

con la proposición dada antes?

Actividad 11

LA TAREA
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente proposición estudiantil. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

Entre tanta plática en un grupo de alumnos, Juan le dice a Pedro

Si me das $100, te hago la tarea

Reflexione sobre esta proposición y considere las siguientes situaciones:

1. Imagine que Pedro le da los $100 a Juan. ¿Le hace la tarea?
2. Suponga que Pedro no le da los $100 a Juan. ¿Le hace la tarea?
3. Considere ahora que Juan le hizo la tarea a Pedro. ¿Le dio los $100?
4. Finalmente pensemos que Juan no le hizo la tarea a Pedro. ¿Le dio los $100 ?

Actividad 12

LA TAREA. Continuación.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la actividad 11, LA TAREA. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

Recuerde que Juan le dice a Pedro

Si me das $100, te hago la tarea

1. Reflexione sobre esta proposición y plantee la(s) situación(es) o escenario(s) posible(s) en donde Juan dice la verdad. Discuta con sus compañeros.
2. Ahora, de la misma manera, considere la proposición y plantee la(s) situación(es) o escenario(s) posible(s) en donde Juan engaña a Pedro. Discuta con sus compañeros.
3. Concentre la información que se tiene del punto 1 y 2.
4. ¿Este concentrado sufre alguna modificación al cambiar la proposición original?

Actividad 13

CUANTIFICADORES
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere lo que se plantea a continuación. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

Tome en consideración la proposición

Todos los miembros del club están felices

1. ¿Cuándo esta proposición es mentira?
2. Escribe en forma clara la negación de la proposición.
3. Observe y cuestione la estructura que toma la proposición del punto 2.
4. ¿Qué pasó con la palabra **todo***?*
5. Considere otros ejemplos para ver lo que ocurre con la palabra **todo** *del punto 4.*

Actividad 14

CUANTIFICADORES. Continuación.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere lo que se plantea a continuación. Haga lo que se pide en cada caso, conteste a las preguntas y discuta con sus compañeros los argumentos que han usado para llegar a las respuestas.

Ahora tome en cuenta la siguiente proposición

Todos los maestros faltan a clases al menos una vez en el semestre.

1. Reflexione y discuta cuál es la proposición que expresa la "idea contraria" a la proposición dada.
2. Escríbala en forma clara.
3. ¿Qué pasó con la palabra **todo** *y con la frase* **al menos una vez***?*
4. ¿Qué puede decir acerca de los cuantificadores **todo** *y* **al menos uno***?*
5. Considere otros ejempos para ver lo que ocurre con la relación encontrada en 4.

Ahora presentamos algunos problemas en donde se plantea en su caso una posible estrategia para llegar a la solución, a las cuales nos hemos atrevido a llamar situaciones problemáticas.

Estas no tienen mucho que ver con la semántica de los conectivos lógicos, sino más bien con el uso de tales conectivos, algunos otros conocimientos y unas que otras habilidades para enfrentar tales situaciones.

Situación Problemática 1

LOS ALUMNOS DE LA DACB.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente situación. Léala con detenimiento y conteste a lo que se pide, escribiendo en forma clara y concreta los argumentos que conducen a sus respuestas.

Raúl, Andrés y Jorge son tres estudiantes de la DACB que viven juntos en una casa que le rentan a doña Pancha, en Cunduacán. En el ciclo pasado no les fue como en otras ocasiones, han reprobado cuando menos tres asignaturas cada uno de ellos, y decidieron presentar los tres exámenes ordinarios en los que coincidían todos ellos: el de matemáticas, el de física y el de computación.

El resultado: cada uno de ellos aprobó un sólo examen. Pero cada uno aprobó un examen distinto. Se sabe que:

Si Andrés no aprobó el de física, entonces Raúl aprobó el de computación.

Si Jorge aprobó el física, Andrés aprobó el de computación.

Si Jorge aprobó el de computación, Andrés aprobó el de matemáticas.

Considerando las tres afirmaciones anteriores, deduzca la respuesta a la pregunta, ¿cuál examen aprobó cada uno?

La siguiente situación (situación problemática 2) que le hemos puesto el título de CONFUSIÓN MATRIMONIAL, se puede modificar quitando todas las preguntas del 1 al 7 y formular sólo la pregunta que aparece en el punto número 8. Esto con el propósito de ser coherente con lo discutido en estas notas, en el sentido de dejar espacio para la imaginación y la creatividad y que los alumnos busquen las estrategias que los conduzcan a la solución de esta situación problemática.

Situación Problemática 2

CONFUSIÓN MATRIMONIAL.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente situación. Léala con detenimiento y conteste a las preguntas que se plantean, escribiendo en forma clara y precisa los argumentos que conducen a sus respuestas.

Un grupo de jugadores invitó a su entrenador a una fiesta para celebrar su triunfo, a la cual el entrenador aceptó encantado y se fueron todos al terminar el partido. Naturalmente, la esposa del entrenador lo esperaba en casa con un buen número de preguntas. Al llegar el entrenador a casa, y una vez platicado un poco con su mujer, esta le pregunta: ¿quiénes asistieron a la fiesta?, a lo que el entrenador, un poco distraído como consecuencia de la fiesta, le contesta:

"Los muchachos de costumbre. Y algunas caras nuevas: Tadeo, Pedro y Carlos, con sus mujeres, Teresa, Susana y Luisa. No puedo recordar quién está casado con quién. De todos modos cada una de las parejas tiene un hijo. Se llaman Ruth, María y Ricardo. Me hablaron de todos ellos. Teresa me dijo que su hija representaba a Anita en la obra de teatro de la escuela, "Anita te quitó el arma". Pedro me dijo que su hija representaba a Ofelia. Recuerdo que Tadeo afirmó que su hija no era María. Y que la mujer de Carlos no es Susana".

La esposa del entrenador exclamó, !ummm, quedé totalmente confundida!
A lo que responde, !Igual estoy yo!

1. ¿Quién es el (la) hijo (a) de Pedro?
2. ¿Quién es el (la) hijo (a) de Teresa?
3. ¿Quién está casado con Teresa?
4. ¿Quién es el (la) hijo (a) de Tadeo?
5. ¿Quién es la esposa de Tadeo?
6. ¿Quién es el (la) hijo (a) de Carlos?
7. ¿Quién es la esposa de Carlos?
8. Concentre la información de las preguntas 1 a 7 y diga quién está casado con quién y a qué pareja pertenece cada hijo.

3.2. Sobre los Números y los Conjuntos

Finalmente presentamos una serie de problemas o situaciones problemáticas en cuyo camino a la solución posiblemente se usen las operaciones con los números y sus propiedades, o bien se opte por usar las definiciones y propiedades de los conjuntos como herramientas para llegar a resolverlos. Aunque también esperamos la posibilidad de que se tome la decisión de ocupar otros conocimientos como herramientas para tal fin.

Lo importante es seguir, poner atención y ocuparnos de las estrategias o tácticas que se usan para llegar a la solución de los problemas. Así como buscar la posibilidad de que se puedan tomar estos problemas junto con su solución o soluciones para particularizar, generalizar o reinventar una nueva versión del problema.

En esta lista de problemas encontraremos desde aquellos muy sencillos (que posiblemente para muchos no son problemas) hasta algunos de mayor grado de dificultad. Pero hemos procurado, y esperamos que así sea, no incluir situaciones problemáticas con tal grado de dificultad que pueda causar desánimo.

Debemos procurar en la medida de lo posible que los problemas o situaciones problemáticas que se planteen al grupo, despierten el interés de los involucrados considerando el grado de dificultad de los problemas y las condiciones de los alumnos para que no se presente una situación que nos desaliente.

La lista no tiene ningun tipo de orden.

Sugerimos, si es que se toma la decisión de considerar algunos de esta lista, se escojan los más adecuados, de acuerdo a las condiciones del grupo, o en su caso, se hagan los modificaciones pertinentes, o se reinventen los propios.

Situación Problemática 3

LOS VIAJEROS.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente situación. Léala con detenimiento y conteste a las preguntas que se plantean, escribiendo en forma clara y concreta los argumentos que conducen a sus respuestas.

Cansados de viajar buena parte del día, tres viajeros se detuvieron en un puesto de tacos que tenia muchas leyendas, entre las cuales, la siguiente:

Pida su orden especial para tres personas.

Y pidieron una de tal orden de tacos para cenar. Y sucedió extrañamente lo siguiente:

El mesero tardó tanto en servir, que cuando les llevó la orden, los tres hombres se hallaban dormidos. Como eran buenos amigos, comieron lo que en justicia correspondía, es decir, un tercio de la cantidad de tacos que encontraron servidos. El primero que despertó se comió su parte y volvió a dormirse sin perturbar a sus compañeros. El segundo viajero que despertó, al ver a sus compañeros dormidos hizo lo mismo. Poco después, ocurrió lo mismo con el tercero. Cuando los tres dormían otra vez, el mesero regresó, limpió la mesa y encontró todavía ocho tacos en el plato.

1. ¿Cuántos tacos tenía la orden especial para tres personas?
2. ¿Cuántos tacos se comió cada uno de los viajeros?

Situación Problemática 4

LA VIDA DE DIOFANTO.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente situación. Léala con detenimiento y conteste a las preguntas que se plantean, escribiendo en forma clara y concreta los argumentos que conducen a sus respuestas.

La historia ha conservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antiguedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, la cual se reproduce textualmente a continuación:

!Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, !oh, milagro!, cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito, que entregó su cuerpo, su hermosa existencia a la tierra, que duró tan solo la mitad que la de su padre.

Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.

1. *¿A qué edad se casó Diofanto?*
2. *¿Qué edad tenía Diofanto cuando nació su hijo?*
3. *¿Qué edad tenía Diofanto cuando murió su hijo?*
4. *¿Cuántos años tenía su hijo cuando murió?*
5. *¿Cuántos años vivió Diofanto?*

En la siguiente situación problemática (Situación problemática 5) se pueden plantear sólo las últimas dos preguntas. Las primeras tres forman una estrategia para conseguir la respuesta a la pregunta que se plantea en el punto número 4.

Situación Problemática 5

LOS PORCENTAJES.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente situación.
Léala con detenimiento y conteste a las preguntas que se plantean, escribiendo en forma clara y concreta los argumentos que conducen a sus respuestas.

De un conocido grupo de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, no fue posible conseguir la lista de alumnos que aprobaron las asignaturas del correspondiente ciclo, ni siquiera se tiene la cantidad de alumnos que aprobaron. Sólo se tienen los porcentajes de alumnos que aprobaron en las respectivas asignaturas, los cuales son: El 72 % de los alumnos aprobó geometría , el 78 % aprobó álgebra elemental, el 80 % aprobó pensamiento matemático, el 85 % aprobó probabilidad y estadística y el 97 % aprobó herramientas de computación.

El departamento de Control Escolar está interesado en saber:

1. ¿Qué porcentaje de los alumnos del grupo, cuando menos, aprobó geometría y probabilidad y estadística?
2. ¿Qué porcentaje de los alumnos del grupo, cuando menos,

aprobó geometría, pensamiento matemático y probabilidad y estadística?
3. ¿Qué porcentaje de los alumnos del grupo, cuando menos, aprobó álgebra elemental, pensamiento matemático, probabilidad y estadística y herramientas de computación?
4. ¿Qué porcentaje de los alumnos del grupo, cuando menos, aprobó las cinco asignaturas juntas?
5. ¿Cuál es el porcentaje máximo de alumnos que aprobaron las cinco asignaturas juntas?

En la siguiente situación problemática (Situación problemática 6) se puede plantear sólo la pregunta del punto número 5. Las restantes forman una estrategia para conseguir la respuesta a esta.

Situación Problemática 6

LOS BARCOS.
Pensamiento Matemático
Fecha...

*Alumno(s):*____________________________________

INSTRUCCIONES: Considere la siguiente situación. Léala con detenimiento y conteste a las preguntas que se plantean, escribiendo en forma clara y concreta los argumentos que conducen a sus respuestas.

Dos barcos de carga (Ferri) que viajan de Cancún a Isla Mujeres y viceversa, salen al mismo tiempo, uno del muelle de Cancún y el otro del muelle de Isla Mujeres. Un Ferri es más rápido que el otro, pero ambos mantienen velocidades constantes. Se cruzan por primera vez a 600 metros del muelle más cercano. Cada Ferri llega al muelle opuesto y permanece en ese embarcadero durante una hora, en lo que cargan y descargan, para luego regresar. En el viaje de retorno se encuentran nuevamente a 150 metros del muelle opuesto al que sirvió de referencia para medir los 600 metros.

1. ¿Cuántas veces han recorrido los dos barcos, el trayecto entre ambos muelles, hasta el momento de encontrarse por primera vez?
2. ¿Cuántas veces han recorrido los dos barcos, el trayecto entre ambos muelles, hasta el momento de encontrarse por segunda vez?

3. ¿Cuántas veces recorrió la distancia de 600 metros el barco más lento, hasta el momento del segundo encuentro? Y a cuántos metros corresponde esto?
4. ¿La distancia entre los dos muelles puede ser más de lo que dio la respuesta a la pregunta (3)?
5. ¿Cuánto mide la distancia entre ambos muelles?

Presentamos a continuación una lista de problemas que pueden servir de guía para analizar las estrategias, las habilidades, los conceptos y resultados matemáticos que se ponen en juego en el momento de resolverlos.

Problema 1

Un programa de cómputo genera una sucesión de números de la siguiente manera:

El primer número que imprime es 8, y luego continúa como se explica a continuación: si el último número impreso es par, se imprime enseguida la mitad de ese número y si el último número es impar, se imprime enseguida la suma de los dos últimos números ya impresos.

¿Qué número imprime en el lugar 2006?

Problema 2

Ana, Irma, Norma, Omar, Pablo y Sergio forman tres parejas de enamorados, que fueron juntos al cine a ver una película. Antes de entrar, comenzaron a discutir entre las parejas, sobre si compraban dulces o palomitas de maíz para la botana. El resultado fué que todas las parejas de enamorados quedaron molestas. Como ya tenían los boletos, entraron de cualquier manera, pero se sentaron en forma alternada, teniendo cuidado que ninguno de ellos quedara junto con su pareja. Por eso Norma tenía solamente un hombre a su lado; Irma se sentó al lado de Omar y éste a la derecha de Sergio; Pablo se sentó en el extremo izquierdo del grupo, junto al pasillo.

¿En qué orden se sentaron los enamorados?

Problema 3

Para enumerar las páginas de un libro se usaron 2989 dígitos.

¿Cuántas páginas tiene el libro?

Problema 4

Tres viajeros se hospedan en un hotel y pagan \$ 100 cada uno, \$ 300 en total. Después, el dueño del hotel se da cuenta de que les ha cobrado incorrectamente. Le pide a su ayudante que les regrese \$ 50. El ayudante se da cuenta de que no puede dividir \$ 50 entre tres y decide darles \$ 10 a cada viajero y quedarse con los \$ 20 restantes. Así el costo del hospedaje fue de \$ 90 por cada viajero, es decir, \$ 270 en total. Los \$ 270 pagados por la habitación más los \$ 20 que el ayudante tomó son \$ 290. Sin embargo, los viajeros pagaron \$ 300 originalmente.

¿Qué pasó con los \$ 10 restantes?

Problema 5

De un patio cuadrado sacaron todos los adoquines (ladrillos) que también eran cuadrados y ninguno estaba cortado. Con esos adoquines se pudieron cubrir tres andadores: dos tenían veinte ladrillos de largo y el tercero 24. El más largo tenía cinco ladrillos de ancho, pero los tres eran de distintos anchos.

1. ¿Cuál es el ancho de cada camino? 2. ¿Cuántos adoquines se usaron en cada uno?

Problema 6

Ya hace un buen tiempo que el Sr. Rulecindo se fue de mojado a los Estados Unidos en busca de una mejor vida para él y su familia. Siempre que su esposa tiene la oportunidad de platicar con él, le pregunta cuánto gana. Sin embargo, por alguna razón, el Sr. Rulecindo no quiere darle a conocer su sueldo, y solo le dice:

"¡Mira mujer!. Yo les mando 2/3 de lo que gano, para que no les haga falta lo necesario a ti y a nuestros hijos, de lo que me queda me gasto la mitad en comida, y del resto, me gasto 2/3 en ropa y otras cosas que necesito, y todavía me quedan 100 dólares".

Efectivamente, el Sr. Rulecindo ha conseguido su objetivo, pues *su esposa aún no sabe con certeza cuanto gana.*

¿Cuánto gana el Sr. Rulecindo?

Problema 7

Pedro y María visitaron una granja el fin de semana donde se crían gallinas y cerdos. Pedro observó que en total habían 19 cabezas, mientras que María dijo que habían 60 patas.

¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos habían en la granja?

Problema 8

Un cochero no teniendo lugar en su garage para ocho de sus coches, aumentó el tamaño del mismo en un 50 %, pero entonces tuvo sitio para ocho coches más de los que poseía.

¿Cuántos coches poseía?

Problema 9

Un granjero amarra un chivo en la esquina exterior de un establo de 10m por 20m con una cuerda de 25m. Tal es el caso que el chivo puede pastar en cualquier lugar fuera del establo hasta donde la cuerda alcance.

¿Cuál es la medida del área donde el chivo puede pastar?

Problema 10

Pedro salió ayer de su colegio más temprano de lo acostumbrado, y por lo mismo deseaba regresar a casa un poco antes de lo habitual. Antes de salir quiso avisar a su mamá, que normalmente viaja en su automóvil desde su casa al colegio para recogerlo, toma su celular y ¡sorpresa!; no tiene tiempo aire. Por lo que decide caminar hacia su casa por la ruta que siempre toma su mamá para recogerlo, encontrándola a la mitad del trayecto. Aún así, llegó a casa 10 minutos antes de lo que lo habría hecho si hubiese esperado a su mamá en el colegio.

El coche y Pedro caminan a velocidades constantes, pero el coche corre cuatro veces más rápido que Pedro caminando.

Finalmente llegaron a casa exactamente a las dos de la tarde.

¿A qué hora habría llegado a casa Pedro si le hubiese avisado a su mamá con tiempo de su salida anticipada, y esta lo hubiese recogido en su colegio?

Problema 11

Una empresa de consulta realiza un ejercicio con 55 personas escogidas al azar en toda la República Mexicana, para que muestren su nivel de preferencia electoral entre los cinco candidatos a la Presidencia de la República, que los llamaremos **a, b, c, d** *y* **e**.

En la siguiente tabla se observan los datos que se tienen como resultado de esta encuesta en donde se muestra el nivel de preferencia de los participantes, es decir, cada persona dice cual es su primera opción, segunda, tercera, cuarta y quinta opción.

Núm. de personas	*18*	*12*	*10*	*9*	*4*	*2*
Primera Opción	a	b	c	d	e	e
Segunda Opción	d	e	b	c	b	c
Tercera Opción	e	d	e	e	d	d
Cuarta Opción	c	c	d	b	c	b
Quinta Opción	b	a	a	a	a	a

Si las elecciones fueran el día en que se aplicó esta encuesta, ¿Quién sería el ganador?

Problema 12

Raúl, Andrés y Jorge son tres estudiantes que comparten departamento y presentan la siguiente situación:

Todos ellos trabajan para solventar sus gastos personales y los de sus estudios. Uno de ellos trabaja de panadero, otro de taxista y otro de vigilante, pero no se sabe cuál es el oficio de cada quien.

A continuación se tienen cinco pistas para averiguarlo:

1. Raúl y Andrés juegan ajedrez todas las noches.
2. Andrés y Jorge van juntos a los juegos de béisbol.
3. El taxista colecciona monedas, el vigilante, soldaditos de plomo, y el panadero, sellos postales.
4. El taxista nunca ha ido a un juego de béisbol.
5. Jorge nunca ha oído hablar de certificaciones de envíos postales.

Tomando en cuenta estas cinco pistas, ¿Cuál es el oficio de cada uno de ellos?

Apéndice

En Busca de Reflexiones Sobre El Curso

Con el único objetivo de mejorar nuestro trabajo referente a esta asignatura hemos elaborado, la Mtra Cristina y un servidor, dos instrumentos que hemos enmarcado en lo que denominamos *reflexiones sobre el curso*, pero que consisten básicamente en una entrevista y en un ensayo.

Cada vez que nos toca dirigir los trabajos de esta asignatura hacemos este ejercicio, con las modificaciones que amerita cada caso. La información que hemos obtenido de estos instrumentos ha sido muy valiosa, además es muy grato conocer los puntos de vista y cuestionamientos que los estudiantes se hacen al terminar este curso.

Presentamos en seguida una versión de cada uno de estos instrumentos.

La Entrevista

Aquí se pueden ver los distintos puntos que se han abordado en los cuestionamientos que hacemos a los alumnos una vez terminado el ciclo. Esta se usó en un grupo de la División Académica de Educación y Artes.

Las otras versiones no varian mucho de esta, todo gira alrededor de estos puntos que creíamos, y que ahora sabemos, que sirven de mucho, sobre todo como instrumentos de evaluación del curso y del profesor. La información obtenida[1] en cada caso ha sido muy valiosa para la planeación de los próximos cursos y por supuesto para la búsqueda de estrategias que puedan aterrizar mejor al objetivo general planteado en el curso.

REFLEXIONES DEL CURSO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO
(Agosto del 2005)

QUEREMOS SABER LO QUE PIENSAS DE LO QUE FUÉ EL CURSO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN ESTE CICLO CORTO. TE PEDIMOS NOS CONTESTES LAS SIGUIENTES PREGUNTAS.

PARA NOSOTROS ES IMPORTANTE QUE TE EXPRESES CON TODA CONFIANZA Y SINCERIDAD, POR LO CUAL PUEDES, SI LO PREFIERES, HACERLO EN FORMA ANÓNIMA.

1. *a). ¿Crees que este curso vale la pena para tu formación profesional y/o personal? ¿por qué?*
   b). ¿consideras que lo deberían llevar todos los alumnos de la UJAT? ¿por qué?

2. *A ti en lo personal, ¿te sirvió de algo este curso? ¿en qué?*

3. *Qué te pareció el desarrollo de esta asignatura en este ciclo corto del nuevo plan flexible, en relación a:*

   ⋆ *El material presentado: lecturas, búsqueda de información, problemas*

   ⋆ *La forma de trabajar: discusiones, trabajo individual y en pequeños equipos, el intento de generar, organizar y redactar las ideas, la solución de las situaciones problemáticas, etcétera.*

   ⋆ *La relación en el grupo: con los profesores, con tus compañeros*

[1]Esta información aún se encuentra en nuestros archivos.

- ⋆ *La actitud: de los alumnos (hacer-corregir-hacer), de los profesores (ayudar-ayudar-ayudar)*

4. *¿Qué te pareció el proceso de evaluación practicado en esta asignatura?*

5. *En general, ¿cuáles crees que fueron los aciertos y las fallas de los profesores?*

TE LO AGRADECE: LA COMISIÓN

El Ensayo

Cuando pusimos en práctica por primera vez la entrevista, hubo la necesidad de dejar un espacio especial, a petición de los alumnos, para que ellos expresaran algunos comentarios que tenian en relación al curso y que no les fué posible incluirlos en la entrevista. A partir de esta experiencia, en los próximos ciclos, decidimos pedirles por escrito, tales comentarios organizados, en un pequeño ensayo.

Les proporcionamos una hoja con la siguiente leyenda, y pedimos lo reflexionen en casa, lo escriban y nos lo hagan llegar en la siguente sesión —generalmente ya es la última—, misma que aprovechamos para hacer los últimos comentarios y reflexiones sobre el curso. La despedida.

REFLEXIONES DEL CURSO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO
(Agosto del 2005)

Con el afán de mejorar el trabajo de esta asignatura en los próximos ciclos TE PEDIMOS TU PARTICIPACIÓN; elaborando un ENSAYO sobre el desarrollo de esta asignatura, en donde expreses con toda confianza y sinceridad tus sugerencias, observaciones, inquietudes y todo aquello que nos pueda servir para que a las próximas generaciones les sea de provecho esta asignatura.

Si lo deseas puedes hacerlo en forma anónima.

De ser posible usa, máximo una cuartilla.

TE LO AGRADECE: LA COMISIÓN

Bibliografía

[1] Alan H. Schoenfeld *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Inc., New York, 1985.

[2] Arturo Fregoso, *Los Elementos del Lenguage de la Matemática 1. Lógica y Teoría de Conjuntos*, Trillas, México, D.F. 1985.

[3] Comité para la Ense nanza de las Matemáticas de Nivel Universitario, *Ense nanza Efectiva de las Matemáticas. Sugerencias Didácticas*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F. 1989.

[4] Eugenio Filloy Yague, *Lógica y Conjuntos*, Serie Matemática Educativa en el Aula, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F. 2000.

[5] Gonzalo Zubieta Russi, *Manual de Lógica para Estudiantes de Matemáticas*, Serie de Matemática, Editorial Trillas, México, D.F. 1995.

[6] Hy Ruchlis, *Cómo Pensar con Claridad. Una Amena y Práctica Introducción al Arte de Pensar*, Editorial Diana, México, D.F. 1974.

[7] L. Manuel Santos Trigo, *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*, Se-

rie Lecturas Didácticas, Grupo Editorial Iberoamérica, México, D.F., 2000.

[8] Martin Gardner, *Mental Games. Los Mejores Juegos Matemáticos del Scientific American*, Selector, México, D.F. 1990.

[9] Morris Kline, *El Fracaso de la Matemática Moderna. Por Qué Juanito No Sabe Sumar*, Siglo Veintiuno Editores, México, D.F. 1980.

[10] RELIME, *Revista Latinoamericana de Investigación en Metemática Educativa*, Vol. 1, Núm. 1, International Thomson Editores, México, D.F. 1998.

[11] Ricardo Cantoral, et al, *Desarrollo del Pensamiento Matemático*, Trillas, México, D.F. 2000.

[12] SEP *La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria*, Taller Para Maestros, Segunda Parte, SEP, México, D.F. 1995.